

MC SYLLABUS

8

RELAXATIETRILLINGEN

DOOR

H. BAVINCK

J. GRASMAN

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

1969

Inhoud

	pag.
1. Eigenschappen van relaxatietrillingen	1
1.1 Inleiding	1
1.2 Lineaire en niet-lineaire trillingen	3
1.3 Differentiaalvergelijkingen met een parameter	5
a. Inleidende opmerkingen	5
b. Werk van Liénard	6
c. Intuïtieve behandeling van 2e orde relaxatie- trillingen	9
2. Toepassingen van de stelling van Poincaré-Bendixson	13
2.1 Stelling van Poincaré-Bendixson	13
2.2 Constructie van Stoker	15
2.3 Constructie van LaSalle	18
2.4 Constructie van Ponzo en Wax	21
3. Asymptotische methode van Dorodnicyn	25
3.1 Probleemstelling	25
3.2 Oplossing in gebied I	26
3.3 Oplossing in gebied II	28
3.4 Aansluiting van gebied I met gebied II	29
3.5 Oplossing in gebied III	30
3.6 Aansluiting van gebied II en gebied III	31
3.7 Oplossing in gebied IV	32
3.8 Aansluiting van gebied III en gebied IV	34
3.9 Aansluiting van gebied IV' en gebied I	36
3.10 Bepaling van amplitude en periode van de vaste eigentrilling	38
4. Analytische methode van Cartwright	40
4.1 Inleiding	40
4.2 Korte behandeling van de Van der Pol vergelijking voor grote μ .	40

	pag.
5. Singuliere storingsmethode van Carrier en Lewis	45
5.1 Singuliere storingstheorie	45
5.2 Methode van Carrier en Lewis	48
6. Numerieke behandeling van de vergelijking van Van der Pol	55
7. Algemene theorie van relaxatietrillingen	57
7.1 Inleiding	57
7.2 Veronderstellingen	61
7.3 Gedrag buiten de omgeving van singuliere punten	62
7.4 Gedrag in de omgeving van singuliere punten	64
7.5 De periodieke oplossing	70
Appendix	79
Literatuur	85

Voorwoord

Deze uitgave in de Syllabusreeks van het Mathematisch Centrum bevat een gedeelte van de stof die door de auteurs is behandeld in het Colloquium "Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen", dat in 1968 plaats vond op het Mathematisch Centrum onder leiding van Prof.dr. H.A. Lauwerier.

In hoofdstuk 1 wordt eerst in het kort het toepassingsgebied van relaxatietrillingen geschetst; vervolgens wordt intuïtief het globale gedrag van deze trillingen besproken. Hoofdstuk 2 behandelt de stelling van Poincaré-Bendixson en de toepassingen ervan op relaxatietrillingen. In de hoofdstukken 3, 4 en 5 vindt men een aantal min of meer formele rekenmethoden weergegeven, die alle leiden tot een asymptotische ontwikkeling voor de periodieke oplossing van de vergelijking van Van der Pol met grote parameter. In hoofdstuk 6 is een literatuuroverzicht gegeven van de verschillende numerieke methoden, die zijn gebruikt ter oplossing van de Van der Pol vergelijking. Deze syllabus wordt besloten met een uitvoerige weergave van de algemene theorie van Miščenko en Pontryagin betreffende periodieke oplossingen van stelsels gewone differentiaalvergelijkingen die een kleine parameter voor de afgeleiden bezitten.

1. Eigenschappen van relaxatietrillingen.

1.1 Inleiding

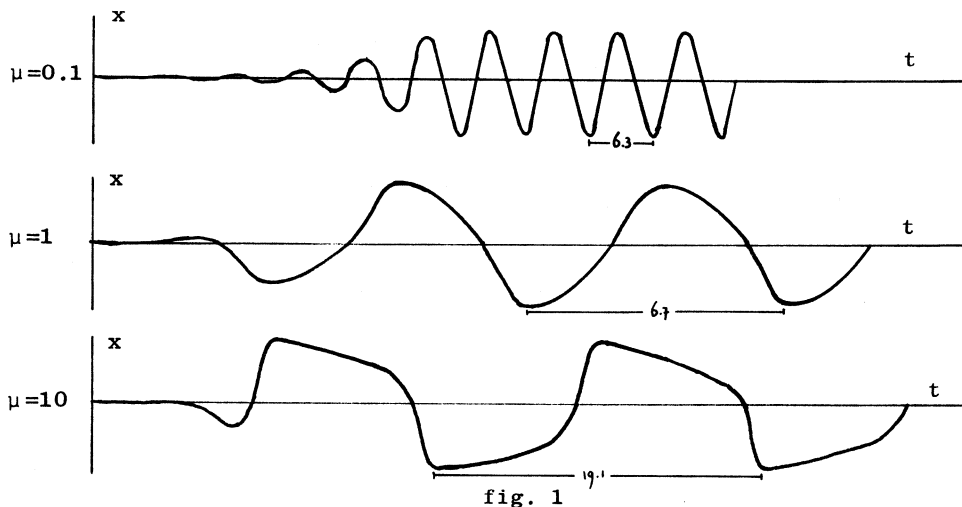
Trillingen, d.w.z. periodieke verschijnselen, treffen wij niet alleen aan in de natuurkunde, maar eveneens in tal van andere wetenschappen als de chemie, economie en biologie. Vele van deze verschijnselen kunnen met de lineaire theorie redelijk mathematisch beschreven worden, maar een aantal hebben zo'n essentieel niet-lineair karakter, dat lineaire benadering het verschijnsel niet meer kan weergeven. Zo heeft Balth. van der Pol [33] een triodeschakeling onderzocht, die spanningstrillingen blijkt te genereren met verrassende eigenschappen. Er ontstaat namelijk onafhankelijk van de beginvoorwaarde een trillings-toestand met een zeer bepaalde amplitude, dit in tegenstelling tot de harmonische trillingen, waarbij in principe elke amplitude mogelijk is. Uit de kromming in de karakteristiek van de triode blijkt hoe de weerstand afhangt van spanning en stroomsterkte, wat aanleiding geeft tot een niet-lineaire differentiaalvergelijking. Met passende keuze van de eenheden wordt de spanning in de triodeschakeling beschreven door de volgende vergelijking

$$(1.1) \quad \ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0,$$

waarbij μ een positieve parameter is.

In een volgend artikel [34] heeft van der Pol de vergelijking (1.1) nader bestudeerd, o.a. met behulp van fase diagrammen. Het blijkt dat voor alle positieve waarden van de parameter μ een periodieke oplossing van deze vergelijking bestaat. Voor kleine waarden van μ ontstaat een trilling, die slechts weinig van een harmonisch trilling verschilt. Voor grote waarden van μ wordt echter een trilling met een sterk discontinu karakter gegenereerd, waarvan de periode evenredig is met μ . Aangezien de parameter μ in feite de relaxatietijd van het systeem voorstelt, heeft van der Pol deze trillingen relaxatietrillingen (relaxatie = ontspanning) genoemd.

Het opnemen en loslaten van energie geschiedt hier op zeer abrupte wijze, wat in het trillingspatroon tot uiting komt door zeer steil lopende stukken. Om een idee te geven van de aard van de trillingen geven wij de onderstaande figuur, waarin de gevallen $\mu = 0.1, 1, 10$ geschetst zijn.



Vele fysiologische periodieke verschijnselen konden als voorbeelden van dergelijke relaxatietrillingen herkend of geïnterpreteerd worden, bv. de hartslag. (zie van der Pol en van de Mark [35]). Ook allerlei fysische trillingen hebben het typisch gedrag van relaxatietrillingen, met name bij de neonbuisoscillator en de multivibrator van Abraham en Bloch (zie [24] pag. 627 e.v.). In de biologie doen zich relaxatietrillingen voor bij de nyctinastische bewegingen van planten, (het zg. slapen van planten) zoals het onderzoek van A. Kleinhornte [17] heeft uitgewezen, terwijl ook de mathematisch biologische studie van Volterra [51] over de "struggle for life" een periodiek verschijnsel oplevert, waarbij de trillingstijd bepaald wordt door een relaxatietijd.

In het recente artikel van Winfree [53] vinden wij een groot aantal voorbeelden van trillingsverschijnselen in de biologie, die duidelijk het karakter hebben van relaxatietrillingen.

In dit boekje zullen wij de diverse methoden behandelen, die gebruikt worden om bij niet-lineaire differentiaalvergelijkingen periodieke oplossingen te vinden met het kenmerkende gedrag van relaxatietrillingen. Wij zullen ons hier beperken tot autonome systemen, zodat eigenschappen betreffende synchronisatie en frequentiedeling niet aan de orde zullen komen.

1.2 Lineaire en niet-lineaire trillingen.

Wij beschouwen eerst de lineaire vergelijking

$$(1.2) \quad \ddot{x} + \lambda \dot{x} + x = 0,$$

welke voor $0 < \lambda < 2$ een gedempte harmonische trilling beschrijft. De algemene oplossing van (1.2) heeft de vorm

$$x(t) = A e^{-\frac{1}{2}\lambda t} \sin \left\{ (t-t_0) \left(1 - \frac{\lambda^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Vergelijking (1.2) kunnen wij beschouwen als de bewegingsvergelijking van een punt in een potentiaalveld $G(x) = \frac{1}{2} x^2$. De totale energie van het bewegend punt wordt

$$(1.3) \quad E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} x^2.$$

Deze energie varieert met de tijd; met behulp van (1.2) vinden wij gemakkelijk dat

$$(1.4) \quad \frac{dE}{dt} = \dot{x} \ddot{x} + x \dot{x} = -\lambda \dot{x}^2.$$

Wij zien dat voor $0 < \lambda < 2$ de aanvankelijke aanwezige energie voortdurend afneemt, in overeenstemming met het gedempte karakter van de trilling. Fysisch kan dit geïnterpreteerd worden als een dissipatie van energie tengevolge van bijvoorbeeld wrijving.

Voor $-2 < \lambda < 0$ kunnen wij spreken van een trillingstype, waarbij er voortdurend energie wordt toegevoerd, zoals bij het in beweging brengen van een schommel, een opslingering. Voor $\lambda = 0$ is de oplossing periodiek; de totale energie blijft hier constant.

Vervolgens onderzoeken wij een algemener type vergelijking:

$$(1.5) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,$$

waarbij $f(x)$ en $g(x)$ willekeurige functies zijn. Hierdoor kan bij het bepalen van de oplossing van (1.5) in het algemeen geen gebruik worden gemaakt van het superpositieprincipe. Dit superpositieprincipe voor lineaire differentiaalvergelijkingen houdt het volgende in:

als $x_1(t)$ en $x_2(t)$ oplossingen zijn, dan is $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ met a_1 en a_2 willekeurige constanten ook een oplossing. Eenvoudig is te verifiëren, dat dit beginsel wel toepasbaar is op de oplossingen van (1.2), maar alleen in zeer speciale gevallen op die van (1.5). Overeenkomstig de voorafgaande beschouwing van (1.2) kunnen wij (1.5) interpreteren als de bewegingsvergelijking van een punt in het potentiaalveld

$$(1.6) \quad G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi.$$

De totale energie is nu

$$(1.7) \quad E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + G(x).$$

Met behulp van (1.5) verkrijgen wij

$$\frac{dE}{dt} = -f(x)\dot{x}^2.$$

Van het gedrag van $f(x)$ hangt nu af hoe de beweging van het punt in het potentiaalveld zal zijn.

Indien $f(x)$ positief definit is, komt dit overeen met het geval $\lambda > 0$ in (1.2) en als $f(x)$ negatief definit is correspondeert dit met $\lambda < 0$. Als $f(x)$ van teken verandert is het mogelijk, dat er een periodieke beweging ontstaat. Er moet dan een getal T bestaan, zodanig dat

$$\int_0^T \frac{dE}{dt} dt = - \int_0^T f(x)\dot{x}^2 dt = 0$$

Immers, een noodzakelijke voorwaarde voor een periodieke beweging is dat na één periode alle afgegeven energie ook weer wordt opgenomen.

In de literatuur zijn voldoende voorwaarden voor de functies $f(x)$ en $g(x)$ te vinden, waaronder de existentie van een periodieke oplossing van (1.5) gewaarborgd is. Zie bv. Cesari [8]. hoofdstuk III, §9.

1.3 Differentiaalvergelijkingen met een parameter.

a. Inleidende opmerkingen

In het vervolg zullen wij veelvuldig differentiaalvergelijkingen onderzoeken, die een grote of een kleine parameter bevatten. Hebben wij bijvoorbeeld een stelsel differentiaalvergelijkingen, in vectorvorm geschreven als

$$\dot{x} = F(x, t, \varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1,$$

dan kan onder zekere voorwaarden de oplossing $x(t, \varepsilon)$ volgens de ontwikkelingsstelling van Poincaré, zie bv. Roseau [41], in een machtreeks naar ε ontwikkeld worden:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots$$

Er bestaan diverse bepalingsmethoden voor $x_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, indien de gezochte $x(t, \varepsilon)$ periodiek is. Wij vermelden de methoden van Lindstedt, van der Pol en Krylov - Bogoliubov en verwijzen voor de behandeling van deze methoden naar Roseau [41]. Zij zijn echter uitsluitend van toepassing, indien het stelsel differentiaalvergelijkingen waaraan $x_0(t)$ moet voldoen van dezelfde orde is als het oorspronkelijke stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x(t, \varepsilon)$. Wij laten deze groep problemen in het vervolg buiten beschouwing. Relaxatietrillingen worden namelijk steeds gevonden als oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen, waarvoor het stelsel differentiaalvergelijkingen voor $x_0(t)$ van lagere orde is dan het oorspronkelijke.

Wij geven nu twee voorbeelden, waarbij het tweede orde stelsel is geschreven in de vorm een tweede orde differentiaalvergelijking.

$$(1.8) \quad \ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad \mu \gg 1 ;$$

$$(1.9) \quad \varepsilon \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 .$$

De parameters komen zodanig in de vergelijkingen voor, dat substitutie van hun limietwaarden ($\mu = \infty$, $\varepsilon = 0$) de vergelijkingen reduceert tot vergelijkingen van lagere orde. In de bovenstaande voorbeelden vinden wij de volgende gereduceerde vergelijkingen:

$$(1.10) \quad f(x)\dot{x} = 0 ;$$

$$(1.11) \quad f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Stellen wij, overeenkomstig (1.6) en (1.7),

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + G(x) ,$$

dan vinden wij voor vergelijking (1.8)

$$(1.12) \quad \frac{dE}{dt} = -\mu f(x)\dot{x}^2.$$

Wanneer $f(x)$ van teken wisselt, slaat door de aanwezigheid van de grote parameter μ in het rechterlid van (1.12) $\frac{dE}{dt}$ abrupt van teken om. Wordt $f(x)$ negatief, dan wordt plotseling een grote hoeveelheid energie door het systeem opgenomen; slaat het teken van $f(x)$ weer om naar plus, dan wordt onmiddellijk een hoeveelheid energie van dezelfde grootteorde gedissipeerd. Dit verschijnsel is kenmerkend voor relaxatietrillingen.

b. Werk van Liénard.

De Franse electrotechnicus A. Liénard [22] heeft in 1928 het bestaan van een periodieke oplossing voor de volgende vergelijking aannemelijk gemaakt:

$$(1.13) \quad \ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} + x = 0.$$

Hierbij stelt hij, dat aan de volgende voorwaarden voldaan moet zijn:

1. $\mu \gg 1$,
2. $f(x)$ begrensd op een eindig x -interval,
3. $f(0) < 0$,
4. $f(x) = f(-x)$,
5. Er bestaat een $x_0 > 0$ zodanig dat $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi > 0$ voor $x > x_0$,
6. $f(x)$ is monotoon stijgend voor $x > x_0$,
7. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} F(x) = \pm \infty$.

Als men stelt $\dot{x} + \mu F(x) = \mu y$, dan wordt (1.13) gerepresenteerd door het stelsel

$$(1.14a) \quad \dot{x} = \mu(y - F(x))$$

$$(1.14b) \quad \dot{y} = -\frac{1}{\mu} x.$$

In het x, y -vlak voldoen de baankrommen aan

$$(1.15) \quad \{y - F(x)\} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} x.$$

Als x begrensd blijft, dan is het rechterlid $O(\mu^{-2})$. Het is voldoende om de baankrommen te beschouwen, die voldoen aan

$$(1.16) \quad \{y - F(x)\} \frac{dy}{dx} = 0,$$

daar voor $\mu \rightarrow \infty$ de trajectoriën van (1.15) zullen naderen tot die van (1.16). Hieraan wordt voldaan door $y = F(x)$ en $y = C$, zie fig. 2.

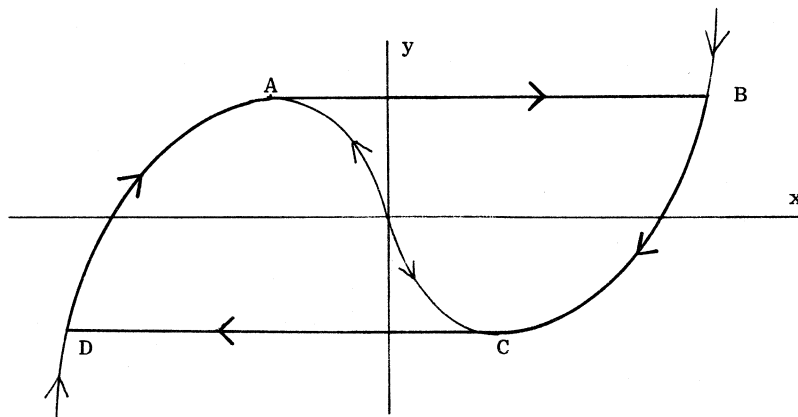


fig. 2

Uit (1.14) volgt, in welke richting de baankrommen doorlopen worden bij toenemende t . Met het (x,y) -diagram van fig. 2 voor ogen kan men concluderen dat, onafhankelijk van de gekozen beginwaarden, men altijd uitkomt op de gesloten baankromme ABCD, die een zg. limietcyclus vormt voor (1.16). Zo'n limietcyclus is het x,y -vlak representeert een periodieke oplossing in het t,x -vlak.

Beschouwen wij vervolgens (1.15), dan kan men de verkregen resultaten als volgt interpreteren: er bestaat een limietcyclus A'B'C'D' voor (1.15), dicht in de buurt van ABCD gelegen en bestaande uit de stukken

- | | | |
|------|--------------------------------|-------------------------------------|
| A'B' | met $y - F(x) = O(1)$, | $\dot{x}$ is $O(\mu)$ en positief ; |
| B'C' | met $y - F(x) = O(\mu^{-2})$, | $\dot{x}$ is $O(1)$ en negatief ; |
| C'D' | met $y - F(x) = O(1)$, | $\dot{x}$ is $O(\mu)$ en negatief ; |
| D'A' | met $y - F(x) = O(\mu^{-2})$, | $\dot{x}$ is $O(1)$ en positief . |

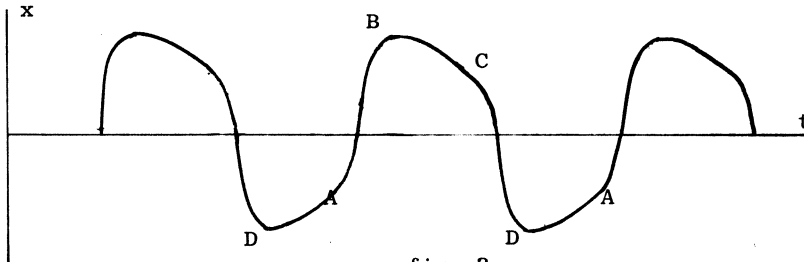


fig. 3

Wij kunnen met behulp van (1.14b) een eerste benadering bepalen voor de periode van de periodieke oplossing van (1.15), die behoort bij A'B'C'D'.

Immers

$$\begin{aligned}
 T &= \mu \oint_{ABCD} \frac{-1}{x} dy = -\mu \left\{ \int_A^B \frac{dy}{x} + \int_B^C \frac{dy}{x} + \int_C^D \frac{dy}{x} + \int_D^A \frac{dy}{x} \right\} = \\
 &= -2\mu \left\{ \int_A^B \frac{dy}{x} + \int_B^C \frac{dy}{x} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\int_A^B \frac{dy}{x} = \int_A^B \frac{dy}{dx} \frac{dx}{x} = \frac{-1}{\mu} \int_A^B \frac{dx}{y-F(x)}, \quad \int_B^C \frac{dy}{x} = \int_B^C \frac{dF(x)}{x} = \int_B^C \frac{f(x)}{x} dx.$$

Bij een gegeven functie $f(x)$ kunnen beide integralen worden bepaald. Voorbeeld: Voor de vergelijking van van der Pol is $f(x) = -(1-x^2)$; hiervoor is aan alle gestelde voorwaarden voor $f(x)$ voldaan en vindt men $T = (3-2\log 2)\mu$ als een eerste benadering voor de periode.

c. Intuïtieve behandeling van tweede orde relaxatietrillingen

De in de vorige paragrafen behandelde vergelijkingen kunnen wij steeds transformeren tot een simultaan stelsel

$$\begin{aligned} (1.17^a) \quad \epsilon \dot{x} &= f(x, y), \\ (1.17^b) \quad \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned} \quad (\epsilon \ll 1)$$

Hiervan heeft het gereduceerde stelsel de gedaante

$$\begin{aligned} (1.18^a) \quad f(x, y) &= 0, \\ (1.18^b) \quad \dot{y} &= g(x, y). \end{aligned}$$

Wij noemen F de kromme in het x, y -vlak, die bepaald wordt door de vergelijking $f(x, y) = 0$. Wij nemen aan dat de kromme F juist twee punten s_1 en s_2 bezit, waarvoor $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ is. Zulke punten noemen wij singuliere punten; de andere punten van F , waarvoor $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ is, noemen wij reguliere punten. Verder nemen wij aan dat F bestaat uit drie delen u_1 , u_3 , en u_2 . Gescheiden door de singuliere punten s_1 en s_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &\text{ bevat reguliere punten waarvoor } \frac{\partial f}{\partial x} < 0 \text{ is;} \\ u_3 &\text{ bevat reguliere punten waarvoor } \frac{\partial f}{\partial x} > 0 \text{ is;} \\ u_2 &\text{ bevat reguliere punten waarvoor } \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ is.} \end{aligned}$$

Bovendien moet ook nog gelden:

$$\begin{aligned} g(x, y) &< 0 && \text{in } s_1 \text{ en op } u_1; \\ g(x, y) &> 0 && \text{in } s_2 \text{ en op } u_2. \end{aligned}$$

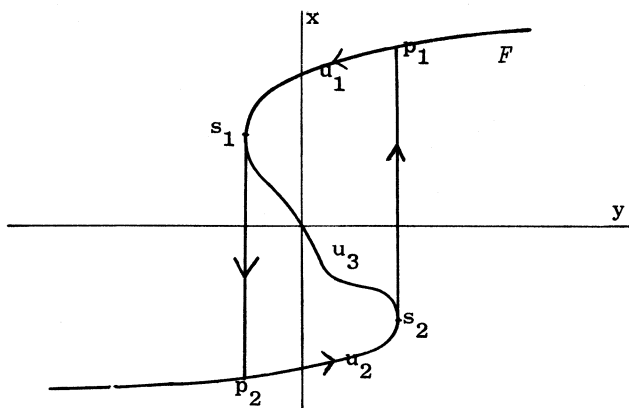


fig. 4

Om het stelsel (1.18) op te lossen, moet men (1.18^a) kunnen schrijven als

$$(1.19) \quad x = \chi(y).$$

Dit is onmogelijk in een willekeurig kleine omgeving van s_1 en s_2 , want x is daar geen eenduidige functie van y . Buiten die omgeving van de singuliere punten kan (1.19) in (1.18^b) gesubstitueerd worden; men verkrijgt dan

$$(1.20) \quad \dot{y} = g(\chi(y), y).$$

Door (1.20) op te lossen, vindt men samen met (1.19) een oplossing voor (1.18). De oplossing van (1.17) zal, voor zeer kleine ε , dicht in de buurt van de oplossing (1.18) met dezelfde beginvoorwaarde liggen.

Stellen wij dat $x(t)$, $y(t)$ een oplossing is van (1.17), dan is het mogelijk door eliminatie van t een baankromme in het fasevlak (x, y -vlak) te bepalen, die deze oplossing representeert.

Wij kiezen een willekeurig punt in het x, y -vlak als beginpunt voor die baankromme. Uit het tekenverloop van $\frac{\partial f}{\partial x}$ langs F kan men gemakkelijk concluderen dat $f(x, y) < 0$ voor de punten links van F en $f(x, y) > 0$ rechts van F is (zie fig. 4).

Links van F zal dan, omdat $\dot{x} = \varepsilon^{-1} f(x, y)$ is, bij de baankromme de x -coördinaat voor toenemende t zeer snel dalen tot in een omgeving van u_1 of u_2 ; rechts van F zal x zeer snel stijgen tot in een omgeving van u_1 of u_2 . Op het stuk u_3 is $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$. Dit houdt in dat in een omgeving boven u_3 (zie fig. 4) x snel toeneemt en de baankromme nadert tot u_1 en onder u_3 de baankromme naar u_2 nadert. Wij zeggen dat u_3 niet stabiel is voor $\dot{x} = \varepsilon^{-1} f(x, y)$.

x is in al deze gevallen de snel-variërende term; y kan in eerste benadering constant genomen worden.

Wij onderzoeken nu of er een periodieke oplossing van (1.17) bestaat. Uit het voorgaande blijkt dat de baankromme naar u_1 of u_2 nadert en vervolgens in de omgeving daarvan blijft. In de buurt van u_1 is $g(x, y) < 0$, zodat de baankromme in de richting van s_1 doorlopen wordt. In de omgeving van s_1 is $f(x, y) < 0$, zodat de x weer snel afneemt en de baankromme naar u_2 nadert. Op een zelfde wijze wordt via u_2 het punt s_2 gepasseerd en komt men weer in u_1 uit. Hiermee is een gesloten baankromme tot stand gekomen; een gesloten baankromme correspondeert steeds met een periodieke oplossing van het stelsel (1.17).

Uiteraard kan een dergelijke beschouwing de existentie van een periodieke oplossing van (1.17) alleen maar plausibel maken en zeker niet bewijzen. Om werkelijk tot een bewijs te komen worden veelal twee methoden gebruikt.

1. Toepassing van de stelling van Poincaré-Bendixson.

Er wordt aangetoond, dat in een ringvormig gebied van het fasevlak een gesloten baankromme bestaat, die een periodieke oplossing representeert. Wij noemen in dit verband het werk van Flanders en Stoker [12], LaSalle [19] en Ponzo en Wax [37]. De ringvormige gebieden worden zo smal gekozen dat op deze wijze een approximatie van de gesloten baankromme gemaakt kan worden. Essentieel voor deze methode is dat x en y scalars zijn: de stelling van Poincaré-Bendixson geldt alleen in twee dimensies.

2. Toepassing van de dekpuntsstelling van Brouwer.

Er wordt bewezen, dat in een omgeving van de discontinue periodieke oplossing van het gereduceerde stelsel (1.18) een periodieke oplossing van het oorspronkelijke stelsel (1.17) bestaat. In dit geval kunnen x en y vectoren zijn. Zie Cartwright-Littlewood [4,5] en Miščenko [27].

Naast deze existentiebewijzen vermelden wij ook enkele methoden om de periodieke oplossing te approximeren:

1. De asymptotische benadering van Dorodnicyn [11] voor de van der Pol vergelijking.
2. Toepassing van de singuliere storingsmethode. Zie Carrier en Lewis [3].
3. De analytische benadering van Cartwright [7].
4. De algemene benadering van Miščenko [27] en Pontryagin [36].

In de volgende hoofdstukken zullen deze methoden weergegeven worden.

2. Toepassingen van de stelling van Poincaré-Bendixson.

2.1 Stelling van Poincaré-Bendixson

In twee dimensies bestaat er een topologische methode om de existentie van periodieke oplossingen van stelsels niet-lineaire differentiaalvergelijkingen aan te tonen. Wij zullen in deze paragraaf slechts de resultaten vermelden. Voor de bewijsvoering wordt verwezen naar [41].

Wij beschouwen het stelsel

$$(2.1a) \quad \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) ,$$

$$(2.1b) \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) .$$

De oplossing $(x_1(t), x_2(t))$ wordt in het fasevlak $(x_1, x_2$ -vlak) gerepresenteerd door een baankromme, die in de richting van toenemende t doorlopen wordt. $x_1(t)$ en $x_2(t)$ voldoen aan (2.1) in het ringvormig gebied D van het fasevlak. Dit gebied D wordt begrensd door twee gesloten krommen C_1 en C_2 .

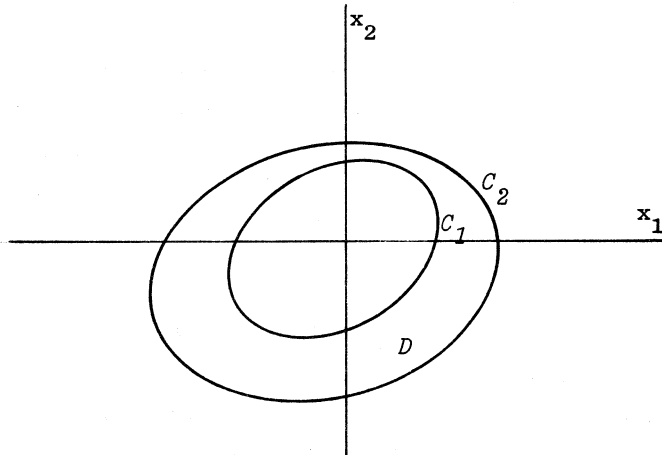


fig. 5

Definitie 2.1 Een punt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ is een evenwichtspunt voor het stelsel (2.1), indien $f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$. Er geldt dat $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ een oplossing van (2.1) is.

Definitie 2.2 Een evenwichtspunt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ is stabiel als voor alle $\varepsilon > 0$ er een $\delta(\varepsilon)$ bestaat, zodanig dat indien een andere oplossing $(x_1(t), x_2(t))$ voor $t = t_0$ voldoet aan

$$|x_1(t_0) - \bar{x}_1| + |x_2(t_0) - \bar{x}_2| \leq \delta(\varepsilon)$$

er geldt voor $t > t_0$

$$|x_1(t) - \bar{x}_1| + |x_2(t) - \bar{x}_2| \leq \varepsilon.$$

Dit is stabiliteit in de zin van Lyapunov.

Als bovendien $(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ indien $t \rightarrow \infty$, dan is er sprake van asymptotische stabiliteit.

Definitie 2.3 Een punt $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ is limietpunt van de oplossing $(x_1(t), x_2(t))$, indien er een rij reële getallen t_n bestaat met $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, zodanig dat $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_1(t_n), x_2(t_n)) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

Definitie 2.4 Een limietcyclus is een baankromme, waarvoor bij ieder punt (x_1, x_2) van de baankromme een geschikt gekozen rij getallen t_n te vinden is met $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$, zodanig dat $(x_1(t_1), x_2(t_1)) = (x_1(t_2), x_2(t_2)) = \dots = (x_1(t_n), x_2(t_n)) = \dots$.

Stelling 2.1 (Poincaré-Bendixson)

Als een baankromme van het stelsel (2.1) voor toenemende t binnen het ringvormig gebied D blijft en de limietpunten van deze baankromme geen evenwichtspunten zijn, dan is óf de baankromme een limietcyclus of zijn limietpunten vormen een limietcyclus.

2.2 Constructie van Stoker

De stelling van Poincaré-Bendixson wordt gebruikt om het bestaan van een periodieke oplossing aan te tonen.

Op deze wijze is de vergelijking van Liénard $\ddot{x} + x = f(\dot{x})$ uitvoerig onderzocht. Voor toepassingen op andere vergelijkingen kunnen wij in dit verband de stellingen van Dragilev-Ivanov en Levinson-Smith aanhalen. Zie bv. Minorsky [24], hoofdstuk 4.

De bewijsprocedure van deze stellingen laat zich als volgt omschrijven. Er wordt een ringvormig gebied D geconstrueerd zodanig dat alle baan-krommen dit gebied binnen gaan voor toenemende t . Ook wordt aangetoond dat het gebied D geen evenwichtspunten bevat. Hiermede zijn de nodige voorwaarden vervuld om de stelling van Poincaré-Bendixson toe te passen.

Wij geven de constructie van Stoker [42] voor de vergelijking van Liénard

$$(2.2) \quad \ddot{x} + x = f(\dot{x}).$$

Wij stellen $\dot{x} = v$, zodat in plaats van (2.2) het stelsel

$$(2.3a) \quad \dot{x} = v,$$

$$(2.3b) \quad \dot{v} = f(v) - x,$$

onderzocht kan worden.

Wij nemen aan dat

a. $f(v)$ een continue afgeleide heeft;

b. $f(v) = g(v) - \alpha v$, $\alpha > 0$, $g(v) = -g(-v)$, $|g(v)| < c$, $\frac{dg}{dv} > 0$,
 $\left[\frac{dg}{dv} \right]_{v=0} > \alpha$, α en c zijn constanten.

$(x, v) = (0, 0)$ is een evenwichtspunt voor (2.3). C_1 en C_2 construeren wij zodanig om de oorsprong dat de vector $(v, f(v) - x)$ naar binnen toe gericht is.

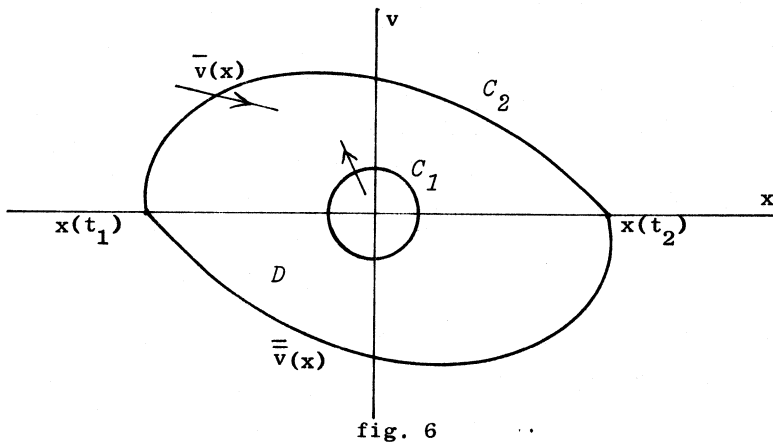


fig. 6

Constructie van C_1 :

Wij onderzoeken het evenwichtspunt $(0,0)$; daartoe wordt $f(v)$ geschreven als

$$f(v) = \beta v + f^*(v) \text{ met } \beta = \left[\frac{df}{dv} \right]_{v=0}.$$

β is positief wegens voorwaarde b. Er volgt dat

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f^*(v)}{v} = 0.$$

In plaats van (2.3) beschouwen wij het gelineariseerde systeem

$$(2.4a) \quad \dot{x}_0 = v_0,$$

$$(2.4b) \quad \dot{v}_0 = \beta v_0 - x_0.$$

Dit systeem heeft de oplossing

$$x_0(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad v_0(t) = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\beta^2 - 4} > 0.$$

$(0,0)$ is een instabiel evenwichtspunt voor het gelineariseerde stelsel (2.4). Met de stelling van Poincaré-Lyapunov (zie bv: [41] pag. 46) kan bewezen worden dat $(0,0)$ ook een instabiel evenwichtspunt is voor (2.3).

Er bestaat een $r_0 > 0$ zodanig dat de cirkel met middelpunt $(0,0)$ een straal r_0 door alle baankrommen gesneden wordt van binnen naar buiten. Deze cirkel zal C_7 heten.

Constructie van C_2 :

Voor $v > 0$ is $\dot{x} > 0$ en

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v)-x}{v} < \frac{c-\alpha v-x}{v}.$$

Het blijkt dat alle baankrommen van (2.3) de integraalkromme van

$$(2.5) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{c-\alpha v-x}{v}$$

snijden. Uit $\frac{dv}{dx} < \frac{dv}{dx}$ en $\dot{x} > 0$ volgt dat voor toenemende t de baankrommen naar binnen gericht zijn.

Wij onderzoeken alleen het geval $\alpha < 2$ en stellen $q^2 = 1 - \frac{1}{4}\alpha^2$.

(Voor $\alpha \geq 2$ kan C_2 op andere wijze geconstrueerd worden.)

Elementaire integratie levert als oplossing voor (2.5) in parameter-vorm

$$\bar{v} = -A e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \sin qt,$$

$$x = c + A e^{-\frac{1}{2}\alpha t} \left(\frac{1}{2}\alpha \sin qt + q \cos qt \right).$$

A is een integratieconstante, die positief genomen wordt. Bovendien is de integraalkromme zo gekozen dat $\bar{v} = 0$ voor $t = 0$.

$\bar{v} = 0$ voor $t_1 = -\frac{\pi}{q}$, $t_2 = 0$; wij kiezen $x(t_1) = -x(t_2)$, hetgeen bereikt wordt als

$$A = \frac{2c}{q} \left\{ \exp\left(\frac{\alpha\pi}{2q}\right) - 1 \right\}^{-1}.$$

Als $v < 0$ vinden wij een integraalkromme $\bar{\bar{v}}(x)$, die de gespiegelde is van $\bar{v}(x)$ t.o.v. de oorsprong. Door de keuze van A vormen $\bar{\bar{v}}(x)$ en $\bar{v}(x)$ een gesloten kromme, die wij C_2 noemen. Hiermee is het bestaan van een limietcyclus bewezen.

2.3 Constructie van LaSalle

Wij zullen nu een toepassing van de stelling van Poincaré-Bendixson geven, waarbij het ringvormig gebied zo smal wordt gemaakt dat de limiet-cyclus erdoor nauwkeurig benaderd wordt. Overeenkomstig LaSalle [19] bestuderen wij de vergelijking van Liénard, maar nu niet in het algemene geval zonder parameter, zoals in de voorafgaande paragraaf, doch in een specifiek relaxatiegeval ($\mu \gg 1$).

$$(2.6) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu f(x) \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

$f(x)$ voldoet aan de voorwaarden:

a. $f(x)$ is continu.

$$b. F(x) = \int_0^x f(u) du, \quad F(0) = 0.$$

c. Er bestaan punten x_1, x_2, x_3, x_4 zodanig dat

$$x_1 < x_2 < 0 < x_3 < x_4;$$

$$F(x_1) = F(x_3), \quad F(x_2) = F(x_4);$$

$$F(x_3) \leq F(x) \leq F(x_2) \text{ voor } x_1 \leq x \leq x_4;$$

$$f(x_1) > 0 \text{ en } f(x_4) < 0.$$

$F(x)$ behoeft dus geen even functie te zijn, zoals bij het werk van Liénard werd geëist.

Wij schrijven (2.6) als een stelsel, waarbij $\mu = 1/\varepsilon$ en $t = \varepsilon \tau$.

$$(2.7a) \quad \frac{dx}{d\tau} = y - F(x),$$

$$(2.7b) \quad \frac{dy}{d\tau} = -\varepsilon^2 x.$$

In het x, y -vlak voldoen de baankrommen aan

$$(2.8) \quad \{y - F(x)\} \frac{dy}{dx} = -\varepsilon^2 x.$$

Voor $\varepsilon = 0$ wordt (2.8)

$$(2.9) \quad \{y - F(x)\} \frac{dy}{dx} = 0,$$

waarvan de baankrommen bestaan uit delen $y = F(x)$ en $y = \text{constant}$.

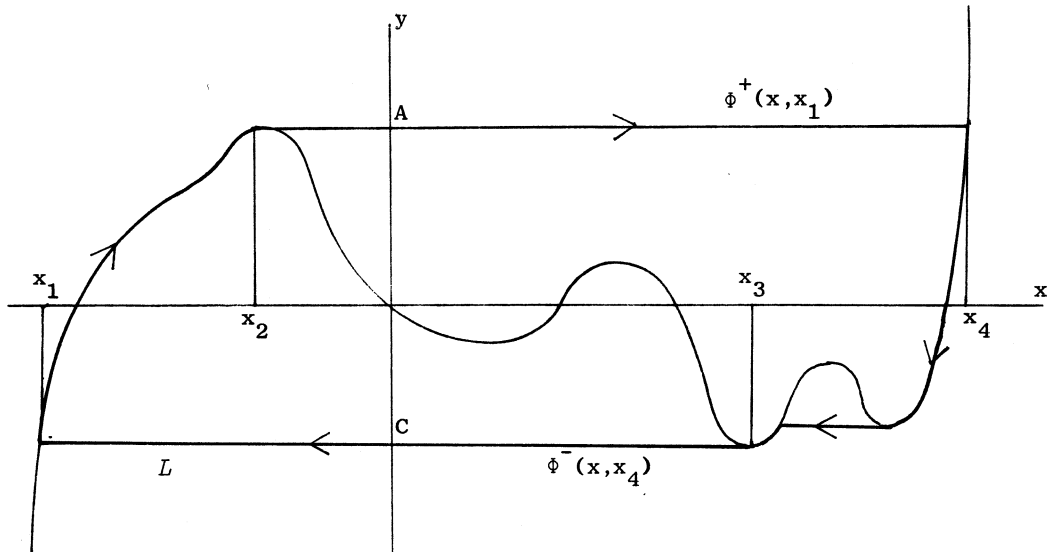


fig. 7

Wij definiëren de functies

$$\Phi^+(x, \alpha) = \max_{\alpha \leq \sigma \leq x} [F(\sigma)], \quad \Phi^-(x, \alpha) = \min_{x \leq \sigma \leq \alpha} [F(\sigma)].$$

De kromme L , die samengesteld is uit de delen $\Phi^+(x, x_1)$ en $\Phi^-(x, x_4)$, vormt een limietcyclus voor de vergelijking (2.9). Wij zullen aantonen dat binnen een zekere omgeving van L een limietcyclus van (2.8) ligt. Overeenkomstig de theorie van paragraaf 2.1 worden twee gesloten krommen C_1 en C_2 geconstrueerd.

De kromme C_1 bestaat uit:

AB: $y = F(b) + \varepsilon(b^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; A ligt op L , $x_A = 0$, $y_A > 0$, B is zodanig op L gekozen dat de rechte AB een helling $-\varepsilon$ heeft.

BC: $y = \Phi^-(x, b)$; C ligt op L , $x_C = 0$, $y_C < 0$.

CD: $y = F(d) - \varepsilon(d^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; D is zodanig op L gekozen, dat de rechte CD een helling $-\varepsilon$ heeft.

DA: $y = \Phi^+(x, d)$.

De kromme C_2 bestaat uit:

PQ: $y = F(q)$; Q is zodanig op L gekozen, dat AQ een helling ε heeft;

$x_P = 0$, $y_P = y_Q$.

QR: $y = \Phi^-(x, q) - \varepsilon(q^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; $x_R = 0$.

RS: $y = F(s) = y_R$; S ligt op L .

ST: $y = \Phi^+(x, s) + \varepsilon(s^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; $x_T = 0$.

TP: $x = 0$.

Opmerking: De keuze van C_1 en C_2 is afhankelijk van de vorm van $y = F(x)$; essentieel voor dit geval is dat $RS < PQ$.

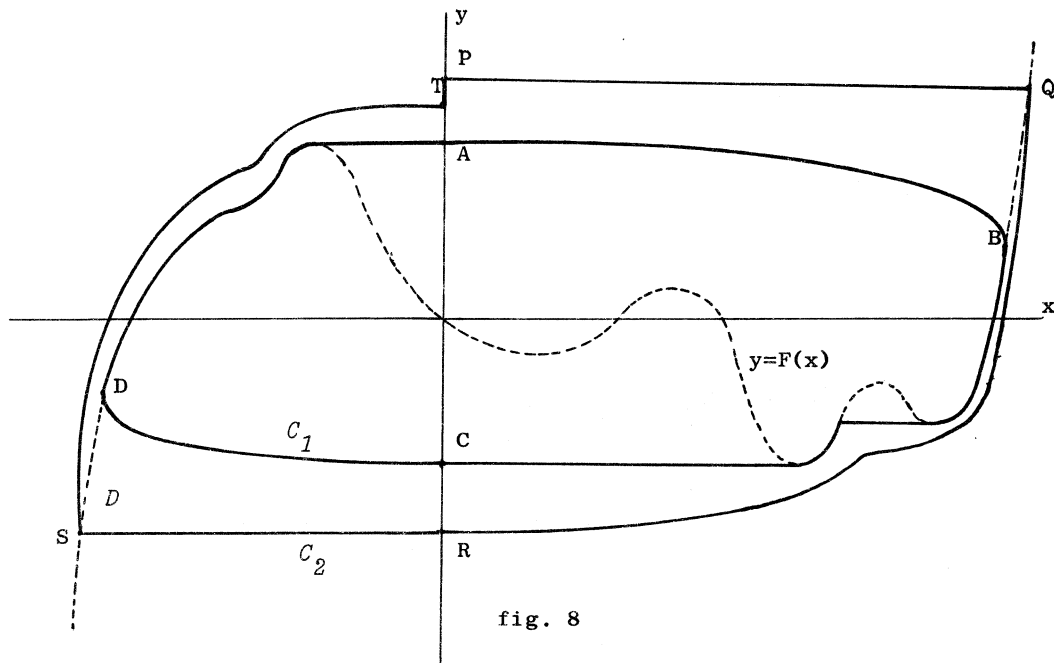


fig. 8

Om de stelling van Poincaré-Bendixson toe te passen, is het noodzakelijk twee punten te onderzoeken:

- a. Het ontbreken van evenwichtspunten in het gebied D tussen C_1 en C_2 .

Hieraan is voldaan.

- b. Elke baankromme, die C_1 en C_2 snijdt blijft voor toenemende t binnen het gebied D .

Dat aan het laatste punt voldaan is, kan als volgt worden aangetoond:

Voor de randen C_1 en C_2 kan men in het algemeen stellen $y = Q(x)$. De normaalvector n van $y = Q(x)$ in het punt (x, y) heeft de componenten $Q'(x)$ en -1 . Verder kunnen wij de verplaatsingsvector v langs een baankromme definiëren als

$$v = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (y - F(x), -\varepsilon^2 x).$$

Uit het teken van het scalair product $n \cdot v$ en uit de richting van de normaalvector n kan men opmaken of een baankromme het gebied D binnengaat of verlaat. Het blijkt nu dat alle baankrommen het gebied D binnengaan. Nemen wij bijvoorbeeld het deel QR van C_2 dan is:

$$Q(x) = \phi^-(x, q) - \varepsilon(q^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$n \cdot v = Q'(x) \{y - F(x)\} + \varepsilon^2 x$$

$$= \left\{ \frac{d}{dx} \phi^-(x, q) + \frac{x}{(q^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} \{y - F(x)\} + \varepsilon^2 x < 0,$$

n is naar buiten gericht, dus v is naar binnen gericht.

Hiermee is aan alle voorwaarden van de stelling van Poincaré-Bendixson voldaan en kan geconcludeerd worden dat er in gebied D een limietcyclus van het stelsel (2.7) bestaat. Voor $\varepsilon \rightarrow 0$ geldt dat $C_1, C_2 \rightarrow L$ (zie fig. 7 en 8).

2.4 Constructie van Ponzo en Wax

Een laatste toepassing van de stelling van Poincaré-Bendixson vinden wij in het werk van Ponzo en Wax. Zij bestuderen de periodieke oplossingen van

$$(2.10) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \mu f(x) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0 \quad (\mu \gg 1)$$

waarbij $f(x)$ en $g(x)$ aan de volgende voorwaarden moeten voldoen.

Wij stellen $F(x) = \int_0^x f(u)du$ en $G(x) = \int_0^x g(u)du$.

- a. Er moeten getallen $a < 0$ en $b > 0$ bestaan zodanig dat $f(a) = f(b) = 0$ en $F(a) > 0$, $F(b) < 0$. Verder moet de vergelijking $F(x) = F(b)$ minstens één negatieve wortel hebben; zij A het negatieve getal met de kleinste absolute waarde waarvoor $F(A) = F(b)$. Evenzo moet de vergelijking $F(x) = F(a)$ minstens één positieve wortel hebben; zij B het kleinste positieve getal waarvoor $F(B) = F(a)$.
- b. Er bestaat een $\varepsilon > 0$ zodanig dat $g(x)$ en $f'(x)$ beide aan de Lipschitz voorwaarde voldoen met $xg(x) > 0$ voor $x \neq 0$ in het interval $A - \varepsilon \leq x \leq B + \varepsilon$.
- c. $g'(x)$ en $f''(x)$ voldoen aan een Lipschitzvoorwaarde in het interval $a \leq x \leq b$.
- d. Er bestaan constanten $K_1 > 0$ en $K_2 > 0$, zodanig dat $f(x) > K_1(a-x)$ voor $A - \varepsilon \leq x \leq a$ en $f(x) > K_2(x-b)$ voor $b < x \leq B + \varepsilon$.
- e. Er bestaan positieve constanten L_1 , L_2 , L_3 en L_4 zodanig dat

$$L_2(a-x)^2 \leq F(a) - F(x) \leq L_1(a-x)^2,$$

$$L_4(x-b)^2 \leq F(x) - F(b) \leq L_3(b-x)^2$$

in het interval $a \leq x \leq b$.

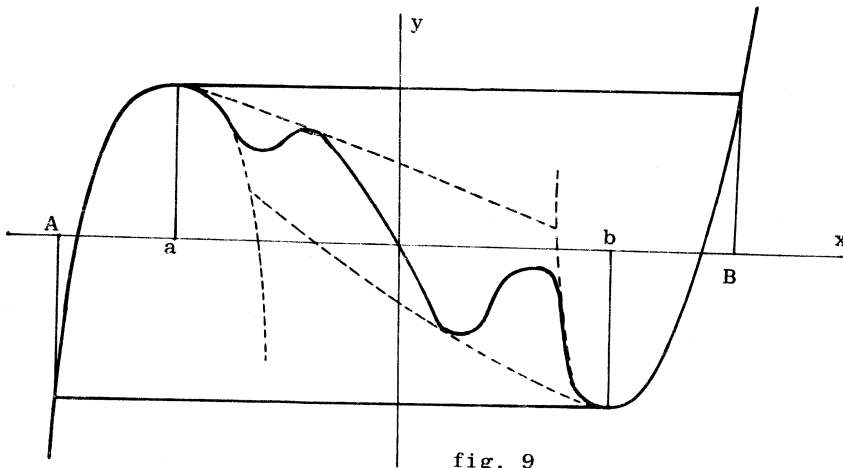


fig. 9

Ponzo en Wax bestuderen de vergelijking (2.10) zowel in het fasevlak (x,v) door het stelsel

$$(2.11a) \quad \dot{x} = \mu v,$$

$$(2.11b) \quad \dot{v} = -\mu f(x)v - 1/\mu \cdot g(x),$$

te beschouwen, als in het "Liénardvlak" (x,y) aan de hand van het stelsel

$$(2.12a) \quad \dot{x} = \mu \{y - F(x)\},$$

$$(2.12b) \quad \dot{y} = -1/\mu \cdot g(x).$$

Onder de voorwaarden a. t/m e. tonen Ponzo en Wax in [37] aan, dat er een stabiele periodieke oplossing van (2.10) bestaat, door een ringgebied in het Liénardvlak met een breedte van hoogstens $O(\mu^{-4/3})$ te construeren dat aan de voorwaarden van de stelling van Poincaré-Bendixson voldoet. In een volgend artikel [38] wordt de gesloten baan kromme asymptotisch benaderd. Bovendien worden er algemene formules voor de positieve en de negatieve amplitude en voor de periode gevonden.

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \text{positieve amplitude} = B + \frac{\alpha}{f(B)} \left[\frac{-2g(a)}{f'(a)} \right]^{1/3} \mu^{-4/3} - \frac{1}{f(B)} \left\{ \frac{2g(B)}{f(B)} + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} g'(a) \left[\frac{-4g(a)}{f'(a)^2} \right]^{1/3} + \frac{4}{9} \frac{g(a)f''(a)}{f'(a)^2} \right\} \frac{\log \mu}{\mu^2} + O(\mu^{-2}). \end{aligned}$$

De negatieve amplitude wordt verkregen door B door A en a door b te vervangen. De tijd, nodig om van $x = A_{\text{neg}}$ naar $x = A_{\text{pos}}$ te komen, bedraagt

$$(2.14) \quad \begin{aligned} T = -\mu \int_A^a \frac{f(x)}{g(x)} dx + \alpha \left\{ \left[\frac{2}{g(a)f'(a)} \right]^{1/3} + \frac{1}{g(A)} \left[\frac{-2g(b)}{f'(b)} \right]^{1/3} \right\} \mu^{-1/3} + \\ + \left\{ \frac{2}{f(B)} - \frac{2}{f(A)} - \frac{2}{3} \frac{g'(a)}{g(a)f'(a)} + \frac{4}{9} \frac{f''(a)}{f'(a)^2} - \frac{1}{g(A)} \left\{ \frac{2}{3} g'(b) \right. \right. \\ \left. \left. \left[\frac{-4g(b)}{f'(b)^2} \right]^{1/3} + \frac{4}{9} \frac{g(b)f''(b)}{f'(b)^2} \right\} \right\} \frac{\log \mu}{\mu} + O(\mu^{-1}). \end{aligned}$$

$$\alpha = 2.33811.$$

(2.13) levert na substitutie van $f(x) = x^2 - 1$, $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - x$, $g(x) = x$, $b = -a = 1$, $B = -A = 2$ voor de Van der Pol vergelijking:

$$\text{Amplitude} = 2 + \frac{1}{3} \alpha \mu^{-4/3} - \frac{16}{27} \frac{\log \mu}{\mu^2} + O(\mu^{-2})$$

in overeenstemming met Dorodnicyn (zie [11]), terwijl de periode vanwege de symmetrie t.o.v. de oorsprong gelijk is aan $2T$.

$$\text{Periode} = (3 - 2 \log 2) \mu + 3 \alpha \mu^{-1/3} - \frac{2}{3} \frac{\log \mu}{\mu} + O(\mu^{-1})$$

in tegenstelling tot Dorodnicyn [11] en Urabe [48], maar in overeenstemming met onze berekeningen (zie Appendix).

In [37] wordt ook nog bewezen dat de limietcyclus die is gelegen in een begrenzend ringgebied volgens de stelling van Poincaré-Bendixson ook eenduidig bepaald is.

3. Asymptotische methode van Dorodnicyn

3.1 Probleemstelling

Wij gaan uit van de Van der Pol vergelijking

$$(3.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0$$

voor grote waarden van de parameter μ .

In het $(x, \dot{x})$ -vlak, het zg. fasevlak, gaat (3.1) over in

$$(3.2) \quad y \frac{dy}{dx} - \mu(1 - x^2)y + x = 0,$$

waarbij $\dot{x} = y$.

De vergelijking (3.1) heeft een periodieke oplossing, waarvan het karakter schematisch bekend is (zie hoofdstuk 2). In fig. 10 is in het fasevlak de bijbehorende limietcyclus geschetst.

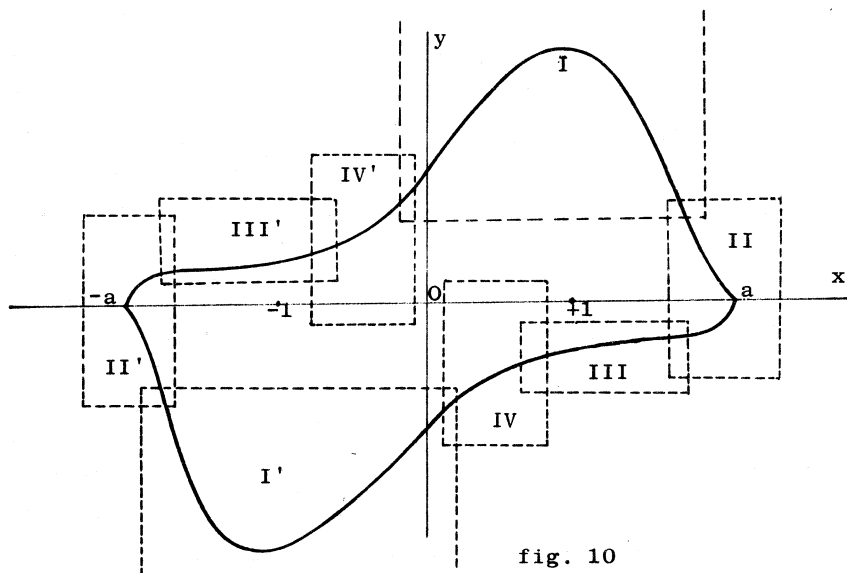


fig. 10

Er zijn in fig. 10 een achttal gebieden getekend.

Van der Pol zelf heeft reeds aangegeven dat in gebied I en gebied III de oplossing van (3.2) voor grote waarden van μ in de buurt ligt van de oplossingen van de volgende gereduceerde vergelijkingen:

in gebied I, waar y groot is,

$$(3.3) \quad y \frac{dy}{dx} - \mu(1 - x^2)y = 0$$

en in gebied III, waar y en $\frac{dy}{dx}$ klein zijn,

$$(3.4) \quad -\mu(1 - x^2)y + x = 0.$$

De gebieden, waar deze benaderende vergelijkingen goed bruikbaar zijn, raken elkaar echter niet en hun oplossingen kunnen dus niet zonder meer onderling aangesloten worden. Zodoende weet men bijvoorbeeld niet hoe de integratieconstante voor vergelijking (3.3) gekozen moet worden, opdat de analytische voortzetting van de oplossing van deze vergelijking in gebied III de oplossing van (3.4) benadert.

Dorodnicyn [11] introduceert twee nieuwe gebieden II en IV, waar hij ook asymptotische oplossingen geeft voor (3.2). De gebieden I, II, III en IV overlappen elkaar, zodat nu de mogelijkheid is geschapen, om een complete oplossing voor de totale limietcyclus te vinden, waarbij de nauwkeurigheid tot een willekeurige orde in μ kan worden opgevoerd. Aangezien (3.2) onveranderd blijft, als wij x vervangen door $-x$ en y door $-y$ zullen wij alleen het gedrag van de oplossing in het rechter halfvlak beschouwen. Het gedrag in de gebieden I', II', III' en IV' wordt verkregen door te spiegelen t.o.v. de oorsprong.

3.2 Oplossing in gebied I

Indien wij met a en $-a$ de nog onbekende waarden van x aangeven, waarvoor in de limietcyclus y gelijk aan 0 wordt (a is de maximale amplitude van de eigentrilling van vergelijking (3.1)), dan definiëren wij de gebieden I en I' als volgt

$$I : \quad -1 + \epsilon_1 < x < a - \epsilon_2, \quad y > 0$$

$$I' : \quad -a + \epsilon_2 < x < 1 - \epsilon_1, \quad y < 0,$$

waarbij ε_1 en ε_2 nader te bepalen kleine positieve getallen voorstellen.

In dit gebied is y in het algemeen van de orde μ , zodat (3.3) als eerste benadering van (3.2) kan worden genomen.

Wij zoeken een oplossing in de vorm

$$(3.5) \quad y = \mu \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \mu^{-2n}.$$

Door (3.5) in (3.2) te substitueren en de coëfficiënten van gelijke machten van μ gelijk te stellen vinden wij een recurrent stelsel vergelijkingen:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} f'_0 &= 1 - x^2 \\ f_0 f'_1 &= -x \\ -f_0 f'_2 &= f_1 f'_1 \\ f_0 f'_{n+1} &= - \sum_{k=1}^n f_k f'_{n+1-k}. \end{aligned}$$

De voorwaarden, die aan $f_n(x)$ worden opgelegd zijn:

$$f_0(0) = c; f_n(0) = 0, n \geq 1.$$

Kiezen wij $c > \frac{2}{3}$, dan heeft de oplossing voor f_0 ,

$$(3.7) \quad f_0(x) = c + x - \frac{1}{3} x^3,$$

een positief reëel nulpunt in $x = x_1$ (> 2). In het vervolg zal de constante c , en daarmee dus x_1 , vastgelegd worden.

De functies $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, hebben een singulariteit in het punt $x = x_1$. Door $f_n(x)$ te ontwikkelen in de omgeving van $x = x_1$ vinden wij

$$(3.8) \quad f_n(x) = O\left(\left[\frac{\log(x - x_1)}{x - x_1}\right]^{n-1}\right).$$

De constanten ε_1 en ε_2 worden zodanig gekozen, dat (3.5) in het gehele gebied I zijn asymptotisch karakter blijft behouden.

3.3 Oplossing in gebied II

Gebied II is gelegen in de omgeving van de punten $x = a$, $y = 0$ en II' in die van $x = -a$, $y = 0$.

In een geschikte omgeving van $x = a$, $y = 0$ voeren we als nieuwe variabelen in $Y = -\mu y$ en bekijken x als functie van Y .

De vergelijking (3.2) wordt:

$$(3.9) \quad \frac{dx}{dY} = \frac{1}{\mu^2} \frac{Y}{(x^2 - 1)Y - x}.$$

Wij schrijven de oplossing in de vorm

$$(3.10) \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(Y) \mu^{-2n}$$

met beginvoorwaarden $\chi_0(0) = a$, $\chi_n(0) = 0$, $n \geq 1$.

Door de reeks (3.10) te substitueren in (3.9) vinden wij een recurrent stelsel vergelijkingen voor de functies $\chi_n(Y)$.

Wij krijgen

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \chi'_0 &= 0, \quad \chi_0 = a \\ [Y(a^2 - 1) - a] \chi'_1 &= Y \\ [Y(a^2 - 1) - a] \chi'_2 &= (1 - 2aY) \chi_1 \chi'_1 \\ [Y(a^2 - 1) - a] \chi'_{n+1} &= \sum_{k=1}^n \chi_k \chi'_{n+1-k} - Y \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \chi'_\alpha \chi_\beta \chi_\gamma \end{aligned}$$

met

$$\alpha + \beta + \gamma = n + 1, \quad 0 \leq \beta, \gamma \leq n, \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

Dit stelsel kan successievelijk worden opgelost.

De functies $\chi_n(Y)$ hebben singulariteiten voor $Y = \frac{a}{a^2 - 1}$ en $Y = -\infty$.

Door $\chi_n(Y)$ te ontwikkelen in de omgeving van $Y = \frac{a}{a^2 - 1}$ vinden we

$$(3.12) \quad \chi_1(Y) = \frac{1}{(a^2 - 1)} \left[Y + \frac{a}{a^2 - 1} \log\left(1 - \frac{(a^2 - 1)}{a} Y\right) \right],$$

$$(3.13) \quad \chi_n(Y) = O\left(\left[\frac{\log\left(Y - \frac{a}{a^2 - 1}\right)}{\left(Y - \frac{a}{a^2 - 1}\right)}\right]^{n-1}\right), \quad n = 2, 3, \dots$$

Analoog geldt dat voor grote negatieve waarden van Y geldt

$$(3.14) \quad \chi_n(Y) = O(Y^n), \quad n = 1, 2, \dots$$

De begrenzing van gebied II wordt zo gekozen, dat (3.10) in het hele gebied een asymptotische reeks blijft.

3.4 Aansluiting van gebied I met gebied II

Om de oplossing in gebied I aan te sluiten aan die in gebied II, is het noodzakelijk, dat er een punt wordt gevonden, waar beide ontwikkelingen geldig zijn.

De oplossing (3.5) behoudt zijn asymptotisch karakter wegens (3.8) nog als $|x - x_1| = O(\mu^{-1})$; dan is $y = O(1)$.

Daar geldt dan $Y = O(\mu)$; de reeks (3.10) behoudt zijn asymptotisch karakter daar op grond van (3.14).

Dorodnicyn kiest in dit gemeenschappelijke convergentiegebied op betrekkelijk arbitraire wijze het punt

$$x = x^*, \quad y = 1, \quad Y = -\mu.$$

Substitutie in de reeksen (3.5) en (3.10) levert

$$(3.15) \quad 1 = \mu \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x^*) \mu^{-2n}, \quad x^* = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(-\mu) \mu^{-2n}.$$

Met behulp van de eerste reeks kunnen wij x^* uitdrukken in de nog niet vastgelegde parameter x_1 .

$$(3.16) \quad x^* = x_1 - \frac{1}{(x_1^2 - 1)} \mu^{-1} - \frac{x_1}{(x_1^2 - 1)^2} \mu^{-2} \log \mu + O(\mu^{-2}).$$

Uit de tweede reeks van (3.15) kunnen wij a uitdrukken in x^* , wat met (3.16) oplevert

$$(3.17) \quad a = x_1 - \frac{2x_1}{(x_1^2 - 1)^2} \mu^{-2} \log \mu + O(\mu^{-2}).$$

Evenzo bestaat er een aansluiting van gebied I' met gebied II'.

3.5 Oplossing in gebied III

De gebieden III en III' worden gedefiniëerd door

$$\text{III} : \quad a - \varepsilon_3 > x > 1 + \varepsilon_4, \quad y < 0,$$

$$\text{III}' : \quad -a + \varepsilon_3 < x < -1 - \varepsilon_4, \quad y > 0.$$

ε_3 en ε_4 zijn nader te bepalen kleine positieve getallen.

Wanneer een integraalkromme van vergelijking (3.2) in één van deze gebieden komt, nadert hij zeer snel tot een vaste kromme. In het (x, t) -vlak betekent dit dat het systeem op dat moment met een grote mate van exactheid overgaat in een vaste eigentrilling. Dit gebied, dat het meest karakteristiek is voor relaxatietrillingen, wordt door Dorodnicyn zeer gedetailleerd behandeld.

Wij bekijken nu gebied III en stellen

$$(3.18) \quad y = -\frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \mu^{-2n} = P(x),$$

wat leidt tot

$$(3.19a) \quad P_0(x) = \frac{x}{x^2 - 1},$$

$$(3.19b) \quad P_1(x) = -\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4},$$

$$(3.20) \quad P_{n+1}(x) = \frac{1}{(x^2-1)} \sum_{k=0}^n P'_k(x) P_{n-k}(x), \quad n=0,1,\dots$$

De functies $P_n(x)$ hebben een singulariteit in $x = 1$, zodanig dat

$$(3.21) \quad P_n(x) = O\left(\left[\frac{1}{x-1}\right]^{3n+1}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

De constanten c_3 en c_4 worden zodanig gekozen, dat (3.18) zijn asymptotisch karakter blijft behouden in het gehele gebied III.

3.6 Aansluiting van gebied II en gebied III

Als punt van aansluiting kiezen we het punt x_0, y_0 , waarbij $y_0 = -\frac{1}{\mu} \frac{a}{a^2-1} + \frac{1}{\mu^2}$, terwijl $x_0 = a + O\left(\frac{\log \mu}{\mu^2}\right)$. Inderdaad heeft de reeks (3.10) zijn asymptotisch karakter in dit punt wegens (3.13) behouden.

Wij moeten dus een oplossing construeren in gebied III, die voldoet aan de voorwaarden $x = x_0$, $y = y_0$ en

$$y_0 + \frac{x_0}{\mu(x_0^2-1)} = O(\mu^{-2}) > 0.$$

Wij stellen daarom

$$(3.22) \quad y = P(x) + \sigma(x)$$

waarbij $\sigma(x_0) = \frac{c_1}{\mu^2}$ voor zekere c_1 .

Door (3.22) te substitueren in de vergelijking (3.2) vindt men een differentiaalvergelijking voor $\sigma(x)$. Deze zetten wij om in een integraalvergelijking, die wij afschatten. Met de methode der successieve approximaties leidt Dorodnicyn af dat

$$|\sigma(x)| < \frac{2c_1}{\mu^2} e^{-\mu^2 m(x)},$$

waarbij $m(x)$ een functie is die > 0 en $O(1)$ is.

Het resultaat kan aldus geformuleerd worden voor elke beginwaarde:

De beweging van het systeem wordt bij nadering van gebied III oscillerend

en gaat naar de aangegeven limietcyclus tot op een grootteorde $\mu^2 \exp(-\mu^2 m)$. Aangezien $P(x)$ bereikt kan worden tot op een grootteorde μ^{-n} (n willekeurig), is de orde van de correctie $\sigma(x)$ kleiner dan iedere term van $P(x)$, zodat $\sigma(x)$ in de asymptotische ontwikkeling kan worden weggelaten. Tenslotte merken wij op dat tevens de aansluiting tussen gebied II' en III' gegarandeerd is.

3.7 Oplossing in gebied IV

De gebieden IV en IV' worden als volgt begrensd:

$$\text{IV :} \quad 1 + \varepsilon_5 > x > 1 - \varepsilon_6, \quad y < 0,$$

$$\text{IV' :} \quad -1 - \varepsilon_5 < x < -1 - \varepsilon_6, \quad y > 0,$$

ε_5 en ε_6 zijn nader te bepalen kleine positieve getallen.

Wij hebben bij de behandeling van gebied III gezien (zie (3.21)), dat nadering van x naar 1 tot op een orde $\mu^{-2/3}$ tot gevolg is, dat y van de orde $\mu^{-1/3}$ wordt. We voeren daarom de volgende variabelen in:

$$(3.23) \quad y = -\mu^{-1/3} Q(u), \quad u = \mu^{2/3}(x - 1).$$

In de nieuwe variabelen krijgt vergelijking (3.2) de vorm

$$(3.24) \quad Q \frac{dQ}{du} - 2uQ + 1 = \mu^{-2/3}(u^2 Q - u).$$

De oplossing wordt gezocht in een reeks

$$(3.25) \quad Q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(u) \mu^{-2/3n}.$$

Door (3.25) te substitueren in (3.24) krijgen wij het volgende recurrente stelsel

$$(3.26a) \quad Q_0 \frac{dQ_0}{du} - 2uQ_0 + 1 = 0,$$

$$(3.26b) \quad Q_0 \frac{dQ_1}{du} - \frac{Q_1}{Q_0} = u^2 Q_0 - u,$$

$$(3.26) \quad Q_0 \frac{dQ_{n+1}}{du} - \frac{Q_{n+1}}{Q_0} = u^2 Q_n - \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \frac{dQ_{n+1-k}}{du}.$$

De begincondities van $Q_n(u)$ worden bepaald door de aansluiting van deze oplossing aan de oplossing in gebied III.

De begrenzing van gebied IV wordt zo gekozen, dat de reeks (3.25) in het hele gebied zijn asymptotisch karakter behoudt.

Wij zoeken eerst de oplossing van (3.26a).

Stellen wij $Q_0 = \frac{du}{dz}$ dan geldt

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - 2u \frac{du}{dz} + 1 = 0,$$

hetgeen na éénmaal integreren oplevert:

$$(3.27) \quad \frac{du}{dz} - u^2 + z = 0.$$

De integratieconstante hebben wij 0 gekozen in verband met de willekeur die nog schuilt in de keuze van z .

Vergelijking (3.27) is een Riccativergelijking, die door de substitutie $u = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dz}$ overgaat in

$$(3.28) \quad \frac{d^2 v}{dz^2} - zv = 0.$$

Hiervan is de algemene oplossing $v = A Ai(z) + B Bi(z)$, dus

$$(3.29) \quad u = -\frac{A Ai'(z) + B Bi'(z)}{A Ai(z) + B Bi(z)}.$$

Hierbij zijn $Ai(z)$ en $Bi(z)$ de zogenaamde Airyfuncties, die aldus uitgedrukt kunnen worden in de gemodificeerde Bessel functies:

$$\begin{aligned} Ai(z) &= \frac{1}{3} \sqrt{z} [I_{-1/3}(\zeta) - I_{1/3}(\zeta)] \\ Bi(z) &= \sqrt{\frac{z}{3}} [I_{-1/3}(\zeta) + I_{1/3}(\zeta)]. \end{aligned} \quad (\zeta = \frac{2}{3} z^{3/2})$$

Voor grote positieve waarden van z gelden de volgende ontwikkelingen (zie [1] hoofdstuk 10):

$$(3.30) \quad \text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \zeta^{-k},$$

$$(3.31) \quad \text{Ai}'(z) \sim -\frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{1/4} e^{-\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_k \zeta^{-k},$$

$$(3.32) \quad \text{Bi}(z) \sim \pi^{-1/2} z^{-1/4} e^{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^{-k},$$

$$(3.33) \quad \text{Bi}'(z) \sim \pi^{-1/2} z^{1/4} e^{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_k \zeta^{-k},$$

$$\text{met } c_0 = d_0 = 1, \quad c_k = \frac{\Gamma(3k + \frac{1}{2})}{54^k k! \Gamma(k + \frac{1}{2})}, \quad d_k = -\frac{6k + 1}{6k - 1} c_k.$$

De functie $Q_1(u)$ kan rechtstreeks worden opgelost uit (3.26b):

$$(3.34) \quad Q_1(u) = \frac{1}{A(u)} \left[c_1 + \int_0^u A(w) \left(w^2 - \frac{w}{Q_0} \right) dw \right]$$

met

$$(3.35) \quad A(u) = \exp\left(-\int_0^u \frac{dw}{Q_0^2(w)}\right).$$

Uit (3.26) kan men gemakkelijk afleiden

$$(3.36) \quad Q_{n+1}(u) = \frac{1}{A(u)} \left\{ c_n + \int_0^u A(w) \left[\sum_{k=1}^n Q_k \frac{dQ_{n+1-k}}{dw} - w^2 Q_n \right] \frac{dw}{Q_0} \right\}.$$

De constanten in (3.29), (3.34) en (3.36) dienen nog bepaald te worden.

3.8 Aansluiting van gebied III en gebied IV

Om de aansluiting van de oplossing (3.29) met gebied III mogelijk te maken moet $Q_0 \rightarrow 0$ als $u \rightarrow \infty$. Dit komt wegens (3.27) neer op $u \rightarrow \infty$ als $z \rightarrow \infty$.

De ontwikkelingen (3.30) t/m (3.33) leren ons, dat dit slechts mogelijk is als in (3.29) $B = 0$ wordt genomen.

Inderdaad heeft

$$(3.37) \quad u = - \frac{Ai'(z)}{Ai(z)}$$

het gewenste gedrag voor $z \rightarrow \infty$ want,

$$(3.38) \quad u = z^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} z^{-3/2} + O(z^{-3}) \right\}.$$

Er volgt verder:
$$Q_0 \sim \frac{1}{2u}.$$

Met behulp van (3.26a) vindt men de volgende asymptotische ontwikkeling voor grote positieve u :

$$(3.29) \quad Q_0(u) = \frac{1}{2u} - \frac{1}{8u^4} + \frac{5}{32u^7} + O(u^{-10}).$$

Verder is het voor de aansluiting van de oplossingen noodzakelijk dat voor zekere $\delta > 0$, $Q_n(u)u^{-2/3n}$ begrensd blijft als $u = O(u^\delta)$ ($n=1,2,\dots$). Door deze voorwaarde worden de c_1 uit (3.34) en de c_n uit (3.36) eenduidig vastgelegd. We krijgen, (van $A(u)$ zie (3.35)),

$$(3.40) \quad Q_1(u) = \frac{1}{A(u)} \int_u^\infty A(w) \left[\frac{w}{Q_0(w)} - w^2 \right] dw$$

$$(3.41) \quad Q_{n+1}(u) = \frac{1}{A(u)} \int_u^\infty A(w) \left[\sum_{k=1}^n Q_k(w) \frac{dQ_{n+1-k}(w)}{dw} - w^2 Q_n(w) \right] \frac{dw}{Q_0(w)}.$$

De asymptotische ontwikkelingen voor grote waarden van u worden:

$$(3.42) \quad Q_1(u) = \frac{1}{4} - \frac{1}{64u^6} + O(u^{-9})$$

$$(3.43) \quad Q_n(u) \sim (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{2^{n+1}}.$$

Evenzo is er aansluiting van gebied III' met gebied IV'.

3.9 Aansluiting van gebied IV' en gebied I

Wij gaan nu terug naar het gebied I voor $y > 0$. Om een limietcyclus te krijgen zal het nodig zijn om de oplossing (3.5) te verbinden met de oplossing (3.25) in gebied IV' ($y > 0$), waar voor u moet worden genomen $-\mu^{2/3}(1+x)$ en waar $y = \mu^{-1/3}Q(u)$ gesteld moet worden.

In gebied IV' geldt dat $y > 0$ als $u = 0$ ($x = -1$). Immers $Q_0(u) = u^2 - z$, $u = -\frac{Ai'(z)}{Ai(z)}$ terwijl $Ai'(z)$ slechts nulpunten heeft voor $z < 0$.

Dus, om aansluiting mogelijk te maken, moet in gebied I hieraan ook voldaan zijn, hetgeen impliceert dat in (3.7) $c > \frac{2}{3}$ moet worden.

Wij stellen daarom $c = \frac{2}{3} + \gamma$.

Wij onderzoeken nu de ontwikkeling (3.5) voor negatieve waarden van x .

Wij nemen $c = \frac{2}{3}$; als wij c vergroten verbetert daardoor de convergentie.

Wij hebben dan

$$f_0(x) = \frac{2}{3} + x - \frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}(x+1)^2(2-x)$$

$$f_1(x) = - \int_0^x \frac{udu}{f_0(u)} = - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3} \log(x+1) + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x}{2}\right).$$

Uit het recurrente stelsel (3.6) kan worden afgeleid, dat de functies $f_n(x)$ in $x = -1$ een singulariteit bezitten van de orde $(x+1)^{-3n+2}$.

Vervolgens bestuderen wij de asymptotische reeks (3.25) voor grote negatieve waarden van u .

De functie $u = -\frac{Ai'(z)}{Ai(z)}$ heeft een enkelvoudige pool voor $z = -\alpha$ met als residu -1 ($\alpha = 2.338\dots$).

In de omgeving van $z = -\alpha$ kunnen wij dus schrijven

$$(3.44) \quad z \sim -\alpha - \frac{1}{u} + \dots$$

Als $z \rightarrow -\alpha$ dan $u \rightarrow -\infty$, terwijl wegens (3.27) geldt

$$Q_0 \sim u^2 + \alpha + \frac{1}{u} + \dots$$

Met behulp van (3.26a) vinden wij de volgende asymptotische ontwikkeling voor grote negatieve u :

$$(3.45) \quad Q_0(u) \sim u^2 + \alpha + \frac{1}{u} - \frac{\alpha}{3} \frac{1}{u^3} - \frac{1}{4u^4} + O(u^{-5}).$$

Met (3.40) en (3.45) kan men afleiden, dat als $u \rightarrow -\infty$

$$(3.46) \quad Q_1(u) \sim \frac{1}{3} u^3 - \frac{2}{3} \log |u| + b_0 + O(u^{-2}),$$

waarbij $b_0 = 0.1723 \dots$

Evenzo volgt uit (3.41) en (3.45) dat voor $u \rightarrow -\infty$

$$Q_n(u) = O(u^{n-1}).$$

Uit het voorgaande blijkt dat de gebieden van asymptotische convergentie voor de reeksen (3.5) en (3.25) overlappen. Als punt van aansluiting kiezen wij het punt $x = -1 + \mu^{-1/3}$. Dus kan de integratieconstante $c = 2/3 + \gamma$ in (3.7) zo gekozen worden, dat in het punt $x = -1 + \mu^{-1/3}$ de waarden van y resulterend uit de formules (3.5) en (3.25) gelijk zijn.

$$(3.47) \quad \mu^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-2/3n} Q_n(-\mu^{1/3}) = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{-2n} f_n(-1 + \mu^{-1/3}).$$

Het linkerlid van (3.47) is te ontwikkelen als

$$(3.48) \quad y(-1 + \mu^{-1/3}) = \mu^{1/3} - \frac{1}{3} + \alpha \mu^{-1/3} - \mu^{-2/3} - \frac{2}{9} \mu^{-1} \log \mu + O(\mu^{-1}).$$

$f_0(x_1) = 0$, zodat

$$(3.49) \quad x_1 = 2 + \frac{1}{3} \gamma - \frac{2}{27} \gamma^2 + O(\gamma^3).$$

Het rechterlid van (3.47) is te ontwikkelen na substitutie van (3.49):

$$(3.50) \quad y(-1 + \mu^{-1/3}) = \mu \gamma + \mu^{1/3} - \frac{1}{3} - \mu^{-2/3} + \frac{2}{9} \mu^{-1} \log \mu + O(\mu^{-1}).$$

Door (3.48) en (3.50) gelijk te stellen krijgen wij

$$(3.51) \quad \gamma = \alpha \mu^{-4/3} - \frac{4}{9} \mu^{-2} \log \mu + (b_0 - 1 - \frac{2}{3} \log \frac{3}{2}) \mu^{-2} + O(\mu^{-8/3}).$$

3.10 Bepaling van amplitude en periode van de vaste eigentrilling

Uit (3.17), (3.49) en (3.51) volgt voor de amplitude

$$(3.52) \quad a = 2 + \frac{1}{3} \alpha \mu^{-4/3} - \frac{16}{27} \mu^{-2} \log \mu + \frac{1}{9} (3b_0 - 1 + 2 \log 2 - 8 \log 3) \mu^{-2} + O(\mu^{-8/3}).$$

Wij zullen nu aangeven hoe de periode van de eigentrilling berekend kan worden. Deze wordt aangegeven door

$$T = 2 \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{y(x)}.$$

Het integratiegebied wordt verdeeld in de volgende 5 delen:

1. Van $-a$ tot $-x_2$, waarbij x_2 de waarde van x voorstelt die in formule (3.10) behoort bij een waarde

$$Y = (1 - \mu^{-4/3}) \frac{a}{a^2 - 1}.$$

De integratie geschiedt hier in gebied II'.

2. Van $-x_2$ tot $-(1 + \mu^{-1/3})$, waar de formules voor gebied III' kunnen worden gebruikt.
3. Van $-(1 + \mu^{-1/3})$ tot $-(1 - \mu^{-1/3})$, waar de formules voor gebied IV' van toepassing zijn.
4. Van $-(1 - \mu^{-1/3})$ tot x^* , waarbij x^* gedefinieerd is in (3.16). Hier worden de formules voor gebied I toegepast.
5. Van x^* tot a , waar de integratie plaats vindt in gebied II.

De integraties worden in de Appendix uitgerekend. Wij vinden tenslotte voor de periode

$$(3.53) \quad T = (3 - 2 \log 2) \mu + 3 \alpha \mu^{-1/3} - \frac{2}{3} \frac{\log \mu}{\mu} + \left(\log \frac{2}{3} + 3b_0 - 1 + \right. \\ \left. - \log \pi - 2 \log(Ai'(-\alpha)) \right) \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3})$$

of

$$(3.54) \quad T = 1.613706\mu + 7.014321\mu^{-1/3} - \frac{2}{3} \frac{\log \mu}{\mu} - 1.3234\mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}).$$

De berekening van Dorodnicyn bevat enkele rekenfouten; Urabe [48] publiceerde hierop in 1960 een correctie, die evenwel ook onjuist is.

Ponzo en Wax [39] hebben deze fout reeds gesignaleerd bij berekeningen volgens hun methode (zie 2.4). Hun resultaten, ook numerieke, stemmen nauwkeuring met (3.53) overeen.

Slotopmerking: Over de convergentie van de in de verschillende gebieden gebruikte reeksontwikkelingen werd niet gesproken. Dorodnicyn geeft echter aan, dat door toepassing van de methode der successieve approximaties in alle gevallen de convergentie is aan te tonen.

4. Analytische methode van Cartwright

4.1 Inleiding

Van 1945 af verschenen een aantal artikelen van M.L. Cartwright en J.E. Littlewood [4-6] betreffende de niet homogene Van der Pol vergelijking en de iets algemenere vergelijking

$$(4.1) \quad \ddot{x} + f(x, \mu) \dot{x} + g(x, \mu) = \mu p(t, \mu),$$

waarin de parameter μ groot werd genomen. Hun methode is daar zowel analytisch als topologisch. Het analytische gedeelte behelst stellingen, die aantonen dat onder zekere voorwaarden de oplossingen van (4.1) uiteindelijk binnen zekere vaste gebieden in het fasevlak zullen blijven als $t \rightarrow \infty$. Het topologische gedeelte bestaat uit de toepassing van geschikte verfijningen van Brouwers dekpuntsstelling.

In 1952, dus 5 jaar na het artikel van Dorodnicyn, publiceerde Cartwright [7] een artikel, waarin zij eveneens de homogene Van der Pol vergelijking voor grote waarden van μ behandelt.

Ook zij vindt een asymptotische formule voor de periode T en de maximale amplitude, maar zij geeft minder termen van de asymptotische reeks dan Dorodnicyn. In tegenstelling tot deze auteur, die het verloop van de periodieke oplossing in het fasevlak bestudeert, werkt Cartwright in het (t, x) vlak. Een ander belangrijk verschil is dat Dorodnicyn gebruik maakt van asymptotische methoden, terwijl Cartwright haar resultaten verkrijgt door allerlei lokaal geldende afschattingen te geven van de plaats x en zijn afgeleiden naar de t . Essentiëel voor deze methode is, dat men het verloop van de periodieke oplossing van te voren al enigszins kent. De verdienste van deze methode ligt dan ook noch in de resultaten noch in de ideeën die eraan ten grondslag liggen, maar vooral in de delicate wijze waarop de procedure is doorgevoerd.

4.2 Korte behandeling van de Van der Pol vergelijking voor grote μ

De Van der Pol vergelijking luidt:

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2) \dot{x} + x = 0.$$

Het verloop van de periodieke oplossing is geschetst in fig. 11.

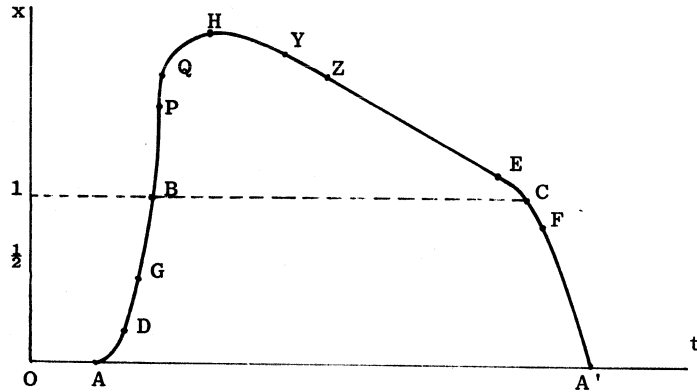


fig. 11

Veelvuldig wordt gebruik gemaakt van een stelling, die in een vroeger artikel van Cartwright [6] werd bewezen nl.

Stelling:

De oplossing waarvoor geldt dat $x = x_0$ en $\dot{x} = \dot{x}_0$ voor $t = 0$ voldoet aan

$$(4.3) \quad |x| < M_0, \quad |\dot{x}| < M_0 \mu \quad \text{voor } t > t_0(M_0, x_0, \dot{x}_0)$$

waarbij M_0 een getal is dat onafhankelijk is van x_0 en $\dot{x}_0$.

Naast de gewone vergelijking (4.2) worden ook de geïntegreerde vergelijking

$$(4.4) \quad \dot{x} - \dot{x}_0 = \mu \left(x - \frac{x^3}{3} - x_0 + \frac{x_0^3}{3} \right) - \int_{t_0}^t x \, dt,$$

de energie vergelijking

$$(4.5) \quad \dot{x}^2 - \dot{x}_0^2 = 2\mu \int_{t_0}^t (1-x^2) \dot{x}^2 \, dt - x^2 + x_0^2$$

en de gedifferentieerde vergelijking

$$(4.6) \quad \ddot{x} - \mu(1-x^2) \ddot{x} + 2\mu x \dot{x}^2 + \dot{x} = 0$$

gebruikt.

Het gebruik van het (t, x) vlak heeft als voordeel dat de vereenvoudigingen, die moeten worden aangebracht in de vergelijkingen (4.2), (4.4), (4.5) en (4.6) onmiddellijk uit het verloop van de kromme kunnen worden afgeleid. Bijvoorbeeld ziet men uit de figuur dat op het traject HE de snelheid $\dot{x}$ negatief en niet groot is; bovendien is hij zo ongeveer constant (dus $\ddot{x} \approx 0$). Dergelijke beschouwingen kunnen voor al de trajecten worden opgezet en ze helpen bij het maken van de noodzakelijke schattingen.

In navolging van Cartwright zullen we de oplossing van (4.2) die door H gaat aangeven met $x = h$, $\dot{x} = \dot{h}$ en evenzo voor de andere punten. Voor het punt H geldt $x = h$, $\dot{x} = 0$, voor C: $x = 1$, $\dot{x} = c$ en voor A: $x = 0$, $\dot{x} = \dot{a}$.

In een serie lemma's worden op de verschillende trajecten de grootheden x , $\dot{x}$, $\ddot{x}$ en t afgeschat. Wij zullen ons hier beperken tot het geven van de grote lijn.

In lemma 1 wordt de energievergelijking (4.5) gebruikt om aan te tonen, dat een oplossing, die start in het maximum H, dat niet te ver boven $x = 1$ gelegen mag zijn, in C aankomt met $|\dot{c}|$ begrensd door een getal, dat alleen van h afhangt. In lemma 2 worden schattingen naar beneden gegeven voor $\dot{x}$ en t , als het traject HC wordt doorlopen. Hoewel dan $\ddot{x} \leq 0$, blijft $\dot{x}$ klein tot x de waarde $x = 1$ nadert; dit heeft tot gevolg dat de oplossing veel tijd nodig heeft om C te bereiken (tenzij h in de buurt van 1 ligt). De lemma's 3, 4 en 5 tonen vervolgens aan dat voor de verschillende trajecten, HY, YZ en ZE de ééNZijdige afschattingen uit lemma 2 ook werkelijk een goede benadering van $\dot{x}$ en t geven, mits $h > \frac{3}{2}$ en x niet te dicht bij 1 komt. Lemma 6 behandelt de boog juist vóór C en lemma 7 die juist na C. Samen tonen zij aan, dat de tijd nodig om de strip $|x-1| < \Delta \mu^{-2/3}$ (voor iedere Δ en $\mu \geq \mu_0(\Delta)$) door te komen hoogstens $M \Delta^2 \mu^{-1/3}$ (voor vaste M) is. Lemma 8 geeft een afschatting voor de tijd nodig om van C het punt A' te bereiken.

Lemma 9 luidt:

Een oplossing die start in A met $\dot{a} > 3/\mu$ bereikt B met

$$(4.7) \quad \left| \dot{b} - \dot{a} - \frac{2}{3} \mu \right| \leq t_{ab} < M \frac{\log \mu}{\mu}.$$

Ter illustratie van de gebezigde methode zullen we dit bewijzen.

Zij G het punt met $x = \frac{1}{2}$. Dan geldt op AG wegens (4.2) dat

$\ddot{x} \geq \frac{3}{4} \mu \dot{x} - x$ en dus stijgt $\dot{x}$ zolang $x < \frac{3}{4} \mu \dot{a}$. Aangezien $x \leq \frac{1}{2}$ is op AG en $\frac{3}{4} \mu \dot{a} > \frac{9}{4}$, geldt dit op geheel AG, zodat $t_{ag} < \frac{1}{2} \frac{1}{\dot{a}} \leq \frac{1}{6} \mu$.

Op AG geldt bovendien wegens (4.4)

$$\dot{x} > \frac{3}{\mu} + \mu x \left(1 - \frac{1}{3} x^2\right) - \int_A^x x \, dt > \frac{3}{\mu} + \frac{11}{12} \mu x - \frac{1}{6} \mu x = \frac{3}{\mu} + \frac{3}{4} \mu x.$$

Dus is $\dot{g} > \frac{3}{\mu} + \frac{3}{8} \mu$ en

$$t_{ag} = \int_A^G \frac{dx}{\dot{x}} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\frac{3}{\mu} + \frac{3}{4} \mu x} < \frac{M \log \mu}{\mu} \quad \text{voor } \mu > \mu_0.$$

Verder is $\dot{x} > \frac{1}{8} \mu$ in de buurt van G. Als ooit $\dot{x} = \frac{1}{8} \mu$ op GB, zij X dan het eerste punt met die eigenschap. Dan geldt

$$t_{gx} < \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{8} \mu} = 4\mu^{-1}.$$

Maar ook geldt

$$\dot{x} > \dot{g} - \int_G^X x \, dt > \frac{3}{\mu} + \frac{3\mu}{8} - \frac{4}{\mu} = \frac{3\mu}{8} - \frac{1}{\mu} > \frac{1}{8} \mu$$

voor $\mu > 2$, wat een tegenspraak inhoudt. Dus $\dot{x} > \frac{1}{8} \mu$ op GB en B wordt bereikt in $t_{gb} < 4\mu^{-1}$.

Het gestelde (4.7) volgt nu onmiddellijk uit de geïntegreerde vergelijking (4.4).

De lemma's 10, 11 en 12 bestuderen in detail BH als $\dot{b}$ groot is. Samengevat tot stelling, geven deze lemma's voor de periodieke oplossing dat

$$\frac{M}{\Delta \mu^{1/3}} \leq |\dot{c}| \leq \frac{M \Delta^{1/2}}{\mu^{1/3}}$$

$$|\dot{a} - \frac{2}{3} \mu| \leq M \Delta^{1/2} \mu^{-1/3}$$

$$|\dot{b} - \frac{4}{3} \mu| \leq M \Delta^{1/2} \mu^{-1/3}$$

$$|h - 2| \leq M \Delta^{1/2} \mu^{-4/3}$$

$$|T - \mu \{ \frac{3}{2} - \log 2 \}| < M \Delta^2 \mu^{-1/3}$$

mits in de afzonderlijke gevallen steeds $\Delta > \Delta_0$ en $\mu > \mu_0(\Delta)$.

In het vervolg van het artikel wordt de constante Δ vervangen door een nauwkeurig aan te geven constante α .

Uiteindelijk wordt gevonden

$$2T = 2\mu \left(\frac{3}{2} - \log 2 \right) + 3\alpha \mu^{-1/3} + o(\mu^{-1/3}),$$

waarbij $\alpha = 2.338 \dots$

5. Singuliere storingsmethode van Carrier en Lewis

5.1 Singuliere storingsmethode

Alvorens de methode van Carrier en Lewis voor de oplossing van de Van de Pol vergelijking te behandelen, geven wij eerst een beschouwing over de singuliere storingsmethode. Wij gaan uit van de functie $U(t;\epsilon)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(5.1) \quad \epsilon L_a(U) + L_b(U) = 0$$

en de voorwaarden

$$(5.2a) \quad U(0;\epsilon) = a(\epsilon),$$

$$(5.2b) \quad U'(0;\epsilon) = b(\epsilon).$$

L_a en L_b zijn differentiaaloperatoren van maximaal tweede orde, waar ϵ niet in voorkomt. ϵ is een kleine parameter $0 < \epsilon \ll 1$. In de storings-theorie stelt men voor de functie $U(t;\epsilon)$:

$$(5.3) \quad U(t;\epsilon) = U_0(t) + \epsilon U_1(t) + \epsilon^2 U_2(t) + \dots;$$

deze reeksontwikkeling wordt in (5.1) gesubstitueerd. Vervolgens worden de coëfficiënten van dezelfde machten in ϵ gelijkgesteld. Hierdoor verkrijgt men een recursief stelsel vergelijkingen voor $U_n(t)$, $n=1,2,3,\dots$. Voor $n=0$ levert dit

$$(5.4) \quad L_b(U_0) = 0.$$

Wij onderscheiden twee gevallen:

a. L_b is een tweede orde differentiaaloperator.

Het is mogelijk een functie $U_0(t)$ te vinden die voldoet aan (5.4) en aan de voorwaarden (5.2ab). Men kan schrijven

$$U(t;\epsilon) = U_0(t) + R(t;\epsilon) \text{ met } R(t;\epsilon) = O(\epsilon) \text{ voor alle } t \geq 0.$$

Er geldt

$$(5.5) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(t_1;\epsilon) = \lim_{t \rightarrow t_1} U_0(t) \text{ voor elke } t = t_1 \geq 0.$$

Eigenschap (5.5) is ook van kracht voor de afgeleiden van t . Dit geval is een regulier storingsprobleem.

b. L_b is een eerste orde differentiaaloperator.

Dientengevolge is L_a een tweede orde operator; er zijn namelijk twee onafhankelijke voorwaarden (5.2a) en (5.2b). In dit geval zal er in het algemeen géén functie $U_0(t)$ bestaan die aan (5.4) én de voorwaarden (5.2ab) voldoet. Wanneer aan (5.2a) voldaan wordt betekent het in het algemeen dat

$$(5.6) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U'(0; \varepsilon) \neq \lim_{t \rightarrow 0} U'_0(t).$$

Een eigenschap als (5.6), geldend voor de functie $U(t; \varepsilon)$ (of voor zijn afgeleide), is kenmerkend voor een singulier storingsprobleem.

Wij eisen niet dat $U_0(t)$ aan (5.2a) of (5.2b) voldoet, maar laten de integratieconstante in $U_0(t)$ voorlopig willekeurig. $U_0(t)$ vormt een benadering voor de oplossing voor $t \geq \sigma(\varepsilon) > 0$, waarbij $\sigma(\varepsilon) \rightarrow 0$ indien $\varepsilon \rightarrow 0$.

Om het gedrag van $U(t; \varepsilon)$ in de omgeving van $t = 0$ te onderzoeken, introduceren wij een nieuwe onafhankelijke variabele τ , die snel variëert in een omgeving van $t = 0$:

$$(5.7) \quad \tau = t/\varepsilon^\nu.$$

τ wordt de locale (of grenslaag-)coördinaat genoemd.

Substitutie in (5.1) maakt dat de termen $\varepsilon L_a U$ en $L_b U$ van een zekere grootteorde in ε worden, afhankelijk van de keuze van ν . Men kiest ν zodanig dat $\varepsilon L_a U$ en $L_b U$ van gelijke grootteorde worden, zodat de invloed van de tweede orde termen in $\varepsilon L_a U$ zich doet gelden. Indien men nu $\varepsilon = 0$ stelt verkrijgt men een differentiaalvergelijking van de tweede orde in de locale coördinaat en wel

$$(5.8) \quad \overline{L}_0(\overline{U}_0(\tau)) = 0.$$

$\overline{U}_0(\tau)$ is de functie die voldoet aan (5.8) én aan (5.2ab). De integratieconstante in $U_0(t)$ wordt bepaald door de aansluitingsconditie:

$$(5.9) \quad \lim_{t \rightarrow 0} U_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{U}_0(\tau).$$

$U_0(t)$ vormt een benadering voor $U(t; \varepsilon)$ als $t \geq \sigma(\varepsilon) > 0$ en $\bar{U}_0(\tau)$ als $0 \leq t \leq \sigma(\varepsilon)$, $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon M$ met M een willekeurig groot vast getal.

Het is mogelijk een uniform geldende benadering $\tilde{U}_0$ op te stellen:

$$(5.10a) \quad U(t; \varepsilon) = \tilde{U}_0(t; \varepsilon) + R(t; \varepsilon).$$

Dan is

$$(5.10b) \quad \tilde{U}_0(t; \varepsilon) = U_0(t) + \bar{U}_0(t/\varepsilon^\nu) - S,$$

waarbij

$$(5.10c) \quad S \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} U_0(t).$$

De grootteorde in ε van de restterm $R(t; \varepsilon)$ hangt af van het probleem.

Voorbeeld:

De functie $U(t; \varepsilon)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$(5.11) \quad \varepsilon \frac{d^2 U}{dt^2} + 2 \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad \text{voor} \quad t \geq 0$$

en aan de randvoorwaarden

$$(5.12a) \quad U(0; \varepsilon) = 0,$$

$$(5.12b) \quad U'(0; \varepsilon) = 1/\varepsilon.$$

De gereduceerde vergelijking (zie (5.4)) wordt

$$2 \frac{dU_0}{d\tau} + U_0 = 0, \quad U_0 = C_0 e^{-\frac{1}{2}\tau}.$$

Substitutie van $t = \varepsilon^\nu \tau$ in (5.11) levert

$$\varepsilon^{1-2\nu} \frac{d^2 U}{d\tau^2} + 2\varepsilon^{-\nu} \frac{dU}{d\tau} + U = 0.$$

Voor $\nu = 1$ wordt dit de vergelijking

$$\frac{d^2 \bar{U}}{d\tau^2} + 2 \frac{d\bar{U}}{d\tau} + \epsilon \bar{U} = 0.$$

In de lokale coördinaat verkrijgen wij de gereduceerde vergelijking

$$\frac{d^2 \bar{U}_0}{d\tau^2} + 2 \frac{d\bar{U}_0}{d\tau} = 0, \text{ zodat } \bar{U}_0 = \bar{C}_1 e^{-2\tau} + \bar{C}_0.$$

Aan (5.12ab) wordt door $\bar{U}_0(\tau)$ voldaan indien $\bar{C}_0 = 1/2$, $\bar{C}_1 = -1/2$. De aansluitingsconditie geeft $C_0 = 1/2$. De uniforme benadering is

$$\tilde{U}_0(t; \epsilon) = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-\frac{2t}{\epsilon}} \right).$$

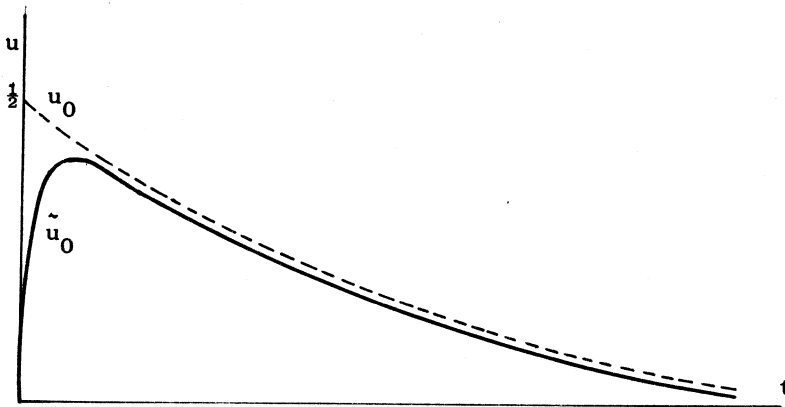


fig. 12

5.2 Methode van Carrier en Lewis

Carrier en Lewis hebben in 1953 [3] de singuliere storingsmethode toegepast bij de bepaling van een periodieke oplossing van de Van der Pol vergelijking (in iets andere vorm).

$$(5.13) \quad \epsilon \frac{d^2 U}{dt^2} - (1 - U^2) \frac{dU}{dt} + U = 0 \quad (0 < \epsilon \ll 1).$$

In plaats van de beginvoorwaarden volgens (5.2ab) zullen wij de integratieconstante A in (5.14) voor $t < 0$ gelijk nul stellen en bovendien zullen wij aannemen dat wij een periodieke oplossing verkrijgen. In fig. 13 zien wij deze oplossing met de gebieden waar volgens het onderstaande de oplossing in elk gebied een eigen benadering heeft.

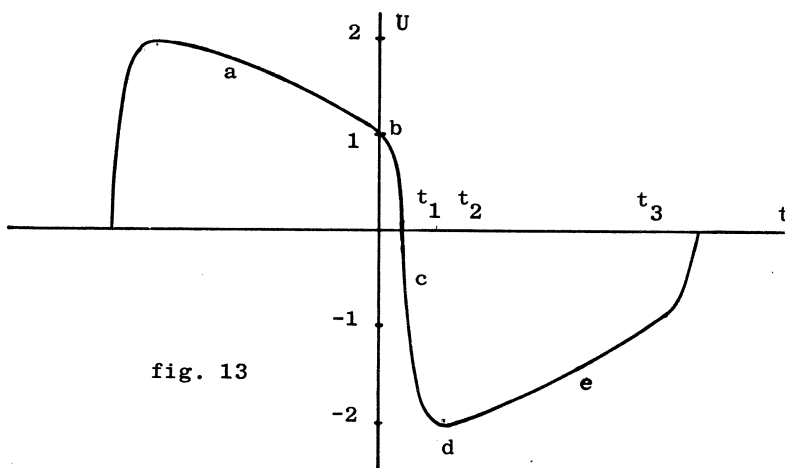


fig. 13

(5.13) heeft de gedaante van een singulier storingsprobleem zoals dat in 5.1 behandeld is. Er zullen zich evenwel complicaties voordoen, die een eenvoudige behandeling, zoals dat met het bovenstaande voorbeeld geschied is, onmogelijk maken.

a. Voor $\varepsilon = 0$ levert (5.13) de gereduceerde vergelijking

$$(5.14) \quad (1 - U_0^2) \frac{dU_0}{dt} = U_0, \quad \text{òf } t = \log |U_0| - \frac{1}{2} (U_0^2 - 1) + A.$$

Men kiest de integratieconstante $A = 0$ indien $t < 0$.

b. In een omgeving van $t = 0$ onderzoeken wij het gedrag van $U(t; \varepsilon)$ door te stellen

$$(5.15a) \quad t = \xi \varepsilon^\beta.$$

Bovendien wordt ook de afhankelijke variabele in $U = 1$ nader bekeken:

$$(5.15b) \quad U = 1 + \varepsilon^\alpha V(\xi).$$

Deze transformatie is nodig vanwege de niet-lineariteit van (5.13) (zie ook de P.L.K.-methode b.v. [44] voor dergelijke substituties).

(5.13) gaat over in de vergelijking

$$(5.16) \quad \varepsilon^{\alpha+1-2\beta} \frac{d^2 V}{d\xi^2} + \varepsilon^{2\alpha-\beta} V(2 + \varepsilon^\alpha V) \frac{dV}{d\xi} + 1 + \varepsilon^\alpha V = 0.$$

Opdat alle termen van gelijke grootteorde in ε worden, kiezen wij

$$(5.17) \quad \alpha = 1/3, \quad \beta = 2/3.$$

Vergelijking (5.16) wordt:

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + 2V \frac{dV}{d\xi} + 1 = -\varepsilon^{1/3} \left\{ V + V^2 \frac{dV}{d\xi} \right\}.$$

De gereduceerde vergelijking in de locale variabelen wordt:

$$(5.18) \quad \frac{d^2 V_0}{d\xi^2} + 2V_0 \frac{dV_0}{d\xi} + 1 = 0 \quad \text{of} \quad \frac{dV_0}{d\xi} + V_0^2 + \xi = B_0,$$

B_0 is een integratieconstante.

Dit is een Riccati-vergelijking, die opgelost wordt door invoering van een nieuwe afhankelijke variabele $Z(\xi)$ volgens $V_0(\xi) = Z'(\xi)/Z(\xi)$.

$Z(\xi)$ moet dan voldoen aan

$$(5.19) \quad Z'' - (B_0 - \xi)Z = 0.$$

De onafhankelijke oplossingen van de Airy-vergelijking (5.19) zijn

$Z_1 = \text{Ai}(B_0 - \xi)$ en $Z_2 = \text{Bi}(B_0 - \xi)$. Voor het gedrag van Airy-functies zie 3.7. De algemene oplossing van (5.19) is

$$Z(\xi) = \lambda \{ \text{Ai}(B_0 - \xi) + B_1 \cdot \text{Bi}(B_0 - \xi) \}$$

met λ en B_1 willekeurige constanten. Hieruit volgt dat

$$V_0(\xi) = \frac{-Ai'(B_0 - \xi) - B_1 \cdot Bi'(B_0 - \xi)}{Ai(B_0 - \xi) + B_1 \cdot Bi(B_0 - \xi)}.$$

De aansluiting met de benadering $U_0(t)$ wordt verkregen doordat uit (5.14) volgt $U_0(t) \approx 1 + \sqrt{-t}$ voor $-1 < t < 0$. Voor $V_0(\xi)$ moet dan gelden

$$(5.20) \quad V_0(\xi) \approx \sqrt{-\xi} \quad \text{als} \quad \xi \ll -1.$$

Aan (5.20) wordt voldaan door de keuze $B_0 = B_1 = 0$, zodat

$$(5.21) \quad V_0(\xi) = \frac{-Ai'(-\xi)}{Ai(-\xi)}.$$

De Airy-functie $Ai(-\xi)$ heeft zijn eerste nulpunt voor $\xi = \alpha > 0$. In een omgeving van $\xi = \alpha = 2,338\dots$ is

$$(5.22) \quad V_0(\xi) \approx (\xi - \alpha)^{-1}.$$

c. In een omgeving van $t = t_1 = \alpha \varepsilon^{2/3}$ introduceren wij opnieuw een locale coördinaat $\eta = (t - t_1)/\varepsilon^\nu$. Uit (5.22) blijkt dat de eerste en de tweede afgeleide zich gedragen als resp. $(t - t_1)^{-2} \varepsilon^{2/3}$ en $-\frac{1}{2} (t - t_1)^{-3} \varepsilon^{2/3}$ in een omgeving van $t = t_1$. Voor $\nu = 1$ worden de eerste en tweede term van de Van der Pol vergelijking van dezelfde grootteorde. Vergelijking (5.13) wordt

$$(5.23) \quad \frac{d^2 U}{d\eta^2} - (1 - U^2) \frac{dU}{d\eta} = -\varepsilon U \quad \text{of} \quad \frac{dU}{d\eta} - U + 1/3 U^3 + C_0 = -\varepsilon \int U d\eta.$$

De constante C_0 kan men bepalen door de vergelijking (5.23) in de variabelen behorende bij (5.18) te transformeren; de vergelijking die men dan verkrijgt mag slechts $O(\varepsilon)$ van (5.18) verschillen (met $\xi = \alpha$ in (5.18)), dus $C_0 = 2/3 + \alpha \varepsilon^{2/3}$.

$$\frac{dU}{d\eta} = U - 1/3 U^3 - 2/3 - \alpha \varepsilon^{2/3} + \varepsilon \int U d\eta.$$

In dit geval wordt aan de gereduceerde vergelijking voldaan door $W_0(\eta)$:

$$\frac{dW_0}{d\eta} = \frac{-1/3(1 - W_0)^2(W_0 + 2 + 1/3\alpha\epsilon^{2/3})}{1 + 1/9\epsilon^{2/3}\alpha(4 - W_0)}.$$

Wij merken op dat deze gereduceerde vergelijking $O(\epsilon^{2/3})$ verschilt van de gebruikelijke, zodat een eenvoudige integratie mogelijk wordt:

$$(5.24) \quad C_1 - \eta = \frac{1}{1 - W_0} + 1/3 \log \left\{ \frac{W_0 + 2 + 1/3\alpha\epsilon^{2/3}}{1 - W_0} \right\}.$$

Er volgt voor $\eta \ll -1$ dat

$$(5.25) \quad W_0 \approx 1 + \frac{1}{\eta - C_1}.$$

Aansluiting van (5.25) met (5.22) is mogelijk als $C_1 = 0$.

Wij leiden uit formule (5.24) af dat

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} W_0 = -2 - 1/3\alpha\epsilon^{2/3} \stackrel{\text{def}}{=} z.$$

Als W_0 de asymptoot $W_0 = z$ nadert, komen wij in een ander gebied van de oplossing.

d. Stellen wij dat voor $t = t_2$ $U(t_2; \epsilon) \approx z$ dan kan wederom met de singuliere storingstheorie inzicht verkregen worden in het gedrag van $U(t; \epsilon)$ in de omgeving van $t = t_2$.

Wij introduceren de variabelen Y en σ :

$$Y = \frac{U - z}{\epsilon^r}, \quad \sigma = \frac{t - t_2}{\epsilon^p}.$$

In (5.13) worden de drie termen van gelijke grootteorde indien $p = r = 1$.

$$\frac{d^2 Y}{d\sigma^2} + \{z^2 - 1\} \frac{dY}{d\sigma} - z = O(\epsilon).$$

De oplossing van de gereduceerde vergelijking wordt

$$(5.26) \quad Y_0(\sigma) = \frac{-z}{z^2 - 1} \cdot \sigma + D_0 + D_1 \cdot \exp\{-\sigma(z^2 - 1)\}.$$

Voor $\sigma \ll -1$ volgt dat $Y_0(\sigma) \approx D_1 e^{-3\sigma}$. (5.24) wordt in een omgeving van t_2 :

$$(5.27) \quad W_0(t; \epsilon) - z \approx 3e^{-1} \exp\{-3(t_2 - t_1)/\epsilon\} \cdot \exp\{-3(t - t_2)/\epsilon\}.$$

Aansluiting is mogelijk voor $D_0 = 0$, $D_1 = 3e^{-1}$ en $t_2 = t_1 + 1/3 \cdot \epsilon \log \epsilon$. Uit (5.26) kan men concluderen dat voor $\sigma \gg 1$

$$(5.28) \quad U(t; \epsilon) \approx -2 + 2/3(t - t_2).$$

e. De benaderende oplossing (5.28) geeft voor $t > 0$ aansluiting met de oplossing van (5.14), die geldt buiten een omgeving van $t = 0$. Dit is in te zien door te stellen $U_0 = -2 + X$. Substitutie van deze vorm in (5.14) geeft voor $0 < X \ll 1$ dat

$$X \approx 1 - 2/3 \ln 2 - 2/3A + 2/3t.$$

Dus $U_0 \approx -1 - 2/3 \ln 2 + 2/3(t - A)$ voor $0 < t \ll 1$; de aansluiting met (5.28) is tot stand gebracht indien

$$(5.29) \quad A = 3/2 + (t_2 - \ln 2).$$

De oplossing $U_0(t)$ voor $t > 0$ en A als in (5.29) is geldig totdat wij in een omgeving van het punt $(U, t) = (-1, t_3)$ komen. Daar wordt een benadering van de vorm (5.21) van toepassing. Wanneer wij het fasevlak $(U, \frac{dU}{dt})$ beschouwen, dan is er symmetrie t.o.v. de oorsprong, zodat voor negatieve U het gedrag van de oplossing is af te leiden uit dat voor positieve U .

Bepaling van de periode T :

$T = 2t_3$. Uit (5.14) en (5.29) volgt dat voor $U_0 = -1$ $t_3 = 3/2 - \ln 2 + t_2$, zodat

$$T = 3 - 2 \ln 2 + 3\alpha\epsilon^{2/3} + O(\epsilon \ln \epsilon).$$

Wij merken op dat deze methode op tamelijk vlotte wijze een eerste benadering geeft. Om op theoretisch verantwoorde wijze de nauwkeurigheid van deze approximatie te bepalen is het noodzakelijk een schatting

te geven van de som van de weggelaten termen. Dit laten Carrier en Lewis na. Dorodnicyn geeft in zijn aanpak (zie hoofdstuk 3) wel recursieformules ter bepaling van de hogere orde termen. Bovendien poneert hij dat met de methode der successieve approximaties de convergentie van de gebruikte reeksen kan worden aangetoond.

6. Numerieke behandeling van de vergelijking van Van der Pol

De vergelijking van Van der Pol

$$(6.1) \quad \ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

is op velerlei wijze numeriek onderzocht. Terwijl men voor zeer kleine waarden van μ en voor zeer grote waarden van μ de beschikking heeft over asymptotische methoden, is men voor de tussenliggende waarden van μ volledig op numerieke resultaten aangewezen.

Voor $\mu \ll 1$ kan het gedrag van de periodieke oplossing worden bepaald door een storingsmethode, die bijvoorbeeld beschreven wordt door Minorsky [24], hoofdstuk 10. Wij vinden voor amplitude en periode

$$(6.2) \quad a = 2 + \frac{1}{96} \mu^2 - \frac{1033}{552960} \mu^4 + O(\mu^6),$$

$$(6.3) \quad T = 2\pi(1 + \frac{1}{16} \mu^2 - \frac{5}{3072} \mu^4 + O(\mu^6)).$$

$(\mu \ll 1)$

Voor $\mu \gg 1$ worden de amplitude en de periode van de periodieke oplossing geleverd door (3.52) en (3.54). Het numerieke onderzoek beperkt zich in hoofdzaak tot het gebied $0 < \mu \leq 10$. Resultaten hieromtrent zijn gegeven door Urabe en zijn medewerkers [45 - 49] en door Krogdahl [18]. Urabe gebruikte een "predictor-corrector" methode, terwijl Krogdahl een gemodificeerde Runge-Kuttamethode heeft toegepast. Zonneveld [54] geeft als toepassing voor zijn Runge-Kuttamethode met variabele staplengte een ALGOL 60-programma voor de oplossing van de Van der Pol vergelijking; hij vermeldt de resultaten voor $\mu = 10$. Maess [23] geeft een methode, om periodieke oplossingen van differentiaalvergelijkingen te benaderen met behulp van Liereeksen en hij behandelt vervolgens de vergelijking (6.1) met deze methode. Zijn resultaten zijn in het algemeen nauwkeuriger dan die van Urabe en Krogdahl. Ponzo en Wax [39] vermelden, ter controle van hun asymptotische berekeningen (zie 2.4) numerieke resultaten, die gebaseerd zijn op de methode van Nordsieck [32]; zij geven waarden voor de amplitude en de periode bij de parameterwaarden $\mu = 8, 10, 20, 25, 50, 100$ en 200. Zij vinden vooral bij de grotere μ 's zeer goede overeenstemming met (3.52) en (3.54). Clenshaw [9] beschrijft een methode

met behulp van Tshebysjev-reeksen, die hij op de vergelijking (6.1) heeft toegepast. Hij geeft daarbij de volgende uitkomsten voor de amplitude en de halve periode, volgens Clenshaw correct tot op een eenheid van de laatste decimaal.

μ	a	$\frac{1}{2} T$
0	2.00000 000	3.14159 265
0.5	2.00248 793	3.19033 790
1	2.00861 986	3.33164 343
1.5	2.01522 650	3.54818 679
2	2.01989 138	3.81493 724
3	2.02330 414	4.42954 775
4	2.02296 250	5.10176 185
5	2.02150 806	5.80611 533
6	2.01983 021	6.53093 737
7	2.01821 530	7.26987 387
8	2.01674 748	8.01908 812
9	2.01544 080	8.77609 207
10	2.01428 536	9.53918 478

7. Algemene theorie van relaxatietrillingen

7.1 Inleiding

In dit hoofdstuk zullen periodieke oplossingen worden bestudeerd van stelsels differentiaalvergelijkingen, waarbij een kleine parameter voor de afgeleiden kan voorkomen. Vele trillingsproblemen hebben geleid tot de studie van differentiaalvergelijkingen van het volgende type:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad i=1,2,\dots,k, \\ \frac{dy_j}{dt} &= g_j(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad j=1,2,\dots,m,\end{aligned}$$

of in vectorvorm

$$(7.1a) \quad \varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x,y),$$

$$(7.1b) \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y),$$

waarbij ε een kleine parameter ($\varepsilon > 0$) is en de functies f_i en g_j een aantal malen differentieerbaar worden aangenomen.

In de komende beschouwingen, die in hoofdzaak een weergave zijn van het werk van Miščenko [27] en Pontryagin [36] zullen de oplossingen van het stelsel (7.1) asymptotisch worden benaderd, waarbij termen van een zekere grootteorde met betrekking tot ε worden verwaarloosd.

Definitie 7.1. Een punt $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}$ uit R^m heet een evenwichtspunt van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad i=1,2,\dots,n,$$

indien geldt

$$F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) = 0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Naast het stelsel (7.1) bekijken wij het gereduceerde stelsel vergelij-

kingen, dat verkregen wordt door in (7.1) $\varepsilon = 0$ te stellen:

$$(7.2a) \quad f(x, y) = 0,$$

$$(7.2b) \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

(7.2a) stelt in de faseruimte R^{k+m} die de directe som is van de k -dimensionale ruimte $X^k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ en de m -dimensionale ruimte $Y^m(y_1, y_2, \dots, y_m)$, een oppervlak voor, dat wij in het vervolg het oppervlak F zullen noemen. Het oppervlak F bevat dus alle evenwichtspunten van het stelsel (7.1a). Bij iedere oplossing van het gereduceerde stelsel (7.2) behoort in de faseruimte een baankromme, die op het oppervlak F is gelegen.

Bij dit oppervlak beschouwen wij de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \end{pmatrix},$$

waarvan wij de determinant D zullen noemen.

In punten, waar $D \neq 0$ is, kunnen wij uit de k relaties (7.2a) x als functie van y schrijven

$$(7.3a) \quad x = \chi(y),$$

wat na substitutie in (7.2b) oplevert

$$(7.3b) \quad \frac{dy}{dt} = g(\chi(x), y).$$

Stellen we de oplossing van (7.3b) voor door

$$(7.4a) \quad y = \psi(t),$$

dan volgt onmiddellijk door substitutie in (7.3a)

$$(7.4b) \quad x = \chi(\psi(t)).$$

De trajectoriën (7.4) kunnen in de faseruimte worden bekeken en zullen worden beschouwd als limiet van de baankrommen van het oorspronkelijke stelsel (7.1) voor $\varepsilon \rightarrow 0$.

Wij zullen nu kwalitatief in de faseruimte R^{k+m} het verloop van de baankrommen, die corresponderen met de oplossingen van het stelsel (7.1) nagaan.

Wij kiezen de oplossing van (7.1), die op het begintijdstip zich bevindt in een punt $(\bar{x}_0, y_0)$, dat op zekere afstand van het oppervlak F is gelegen.

In dat geval zal de vector x veel sneller variëren dan de vector y . Immers, de componenten van de fasesnelheid $\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon} f(x, y)$ zullen, doordat ε zeer klein is, groot zijn, terwijl de andere componenten $\dot{y} = g(x, y)$ van beperkte grootte blijven. Daarom is het als eerste benadering redelijk, om aan te nemen dat de y vast blijft, $y = y_0$, terwijl de x snel verandert in de k -dimensionale ruimte $X_{y_0}^k$ (d.i. de ruimte met alle punten (x, y_0) , waarbij y_0 vast blijft), volgens de vergelijking

$$(7.5) \quad \varepsilon \dot{x} = f(x, y_0).$$

Deze snelle variatie van de x duurt voort tot de grootte $f(x, y_0)$ de waarde nul nadert, d.w.z. als wij het oppervlak F naderen. Dan gaan de componenten van x en van y met vergelijkbare snelheden variëren. Wij zijn dan gekomen in de buurt van een stabiel evenwichtspunt (x_0, y_0) van het stelsel (7.5).

De baankromme loopt dan verder langs het oppervlak F , steeds nieuwe stabiele evenwichtspunten van (7.5) passerend. Dit gedrag zal in paragraaf 7.3 streng worden behandeld. Wanneer evenwel de oplossing in de buurt komt van een punt, waar de determinant $D = 0$ is, wordt het stabiele evenwicht verstoord en zullen de x_i componenten weer snel gaan veranderen tot een nieuw stabiel evenwichtspunt van (7.5) is bereikt.

Deze beschouwing leidt tot de definitie:

Definitie 7.2. Een punt $(x^{(0)}, y^{(0)})$ heet een singulier punt van het stelsel (7.1), indien het een evenwichtspunt is van (7.1a), terwijl bovendien de determinant D daar gelijk aan nul is.

In paragraaf 7.2 zullen wij nog enkele extra voorwaarden geven, waaraan in deze theorie de singuliere punten zullen moeten voldoen.

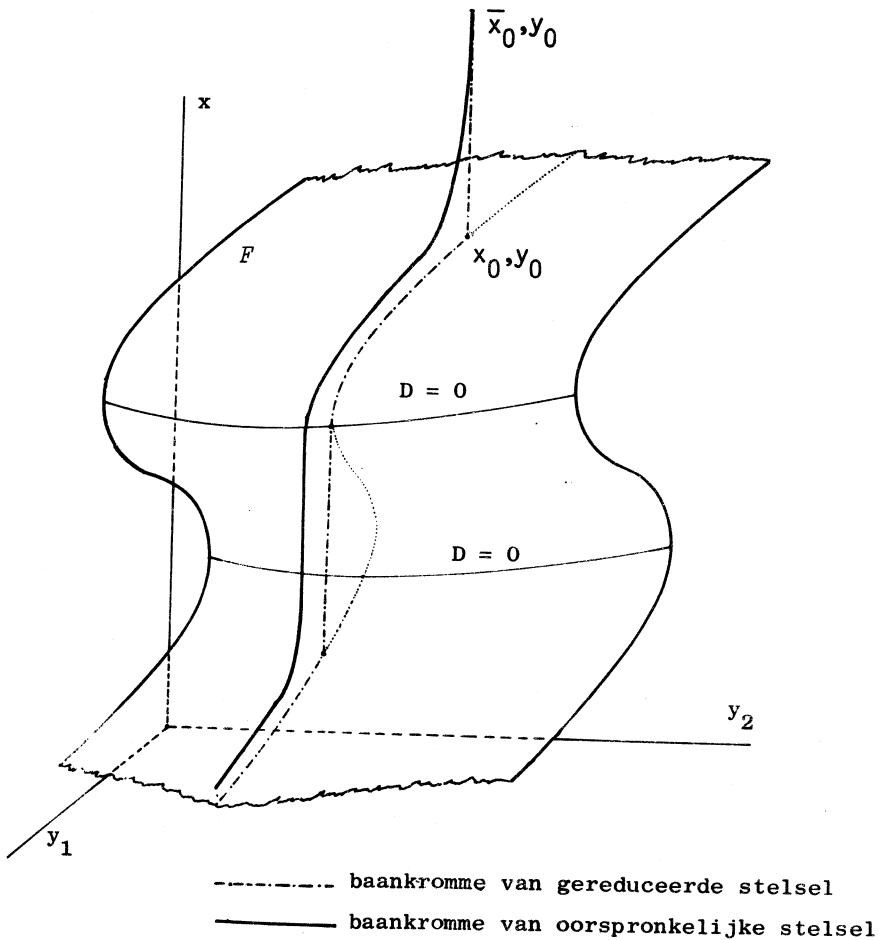


fig. 14

Deze intuïtieve beschrijving laat de mogelijkheid toe om de oplossing van het oorspronkelijke stelsel (7.1) te schetsen aan de hand van het gereduceerde stelsel (7.2). Een baankromme van (7.2) heeft steeds een discontinu karakter, hij bestaat alternerend uit stukken van 2 typen:

- a. stukken van langzame beweging gelegen op het m -dimensionale oppervlak F , die in eindige tijd doorlopen worden;
- b. stukken van snelle beweging, gelegen in de k -dimensionale deelruimte $X_{y_0}^k$, van de ruimte R^{k+m} , een deelruimte die gedefiniëerd wordt door de vergelijking $y = y_0 = \text{constant}$; deze stukken worden oneindig snel doorlopen.

De overgang van langzame naar snelle beweging vindt plaats in een singulier punt. Daar gaat een stabiele evenwichtspositie van (7.1a) over in een instabiele.

Het is mogelijk dat na een aantal stukken van langzame en snelle beweging de baankromme van het stelsel (7.2) zich sluit. Dan is een discontinue periodieke oplossing van (7.2) gevonden.

7.2 Veronderstellingen

Wij nemen aan dat er een discontinue periodieke oplossing voor het stelsel (7.2) bestaat. De bijbehorende limietcyclus in het fasevlak duiden we aan met Z_0 . Aangaande Z_0 worden de volgende eisen gesteld:

- a. De baankromme Z_0 is stabiel; d.w.z. dat het doorlopen van de baankrommen van (7.2), die dicht in de buurt van Z_0 liggen, aanleiding geeft tot een compacte afbeelding ϕ van een klein $(m-1)$ -dimensionaal gebiedje op zichzelf. Dit gebiedje is gelegen op het oppervlak F en is transversaal aan Z_0 . Bovendien wordt aangenomen, dat de afbeelding, die men verkrijgt door linearisatie van ϕ , ook compact is.
- b. In ieder punt (x,y) van een willekeurig stuk van langzame beweging van de cyclus Z_0 hebben de eigenwaarden van de matrix A negatieve reële delen.
- c. De singuliere punten, die gelegen zijn op Z_0 zijn zodanig, dat juist één eigenwaarde van de matrix A nul is, terwijl al de andere eigen-

waarden negatieve reële delen hebben. Bovendien moet worden geëist dat de singuliere punten op Z_0 geen evenwichtspunten zijn van het stelsel (7.1b).

Onder deze voorwaarden is het mogelijk de existentie te bewijzen van een periodieke oplossing van het stelsel (7.1). Bovendien convergeert de bijbehorende gesloten baankromme Z_ϵ naar Z_0 voor $\epsilon \rightarrow 0$. In het vervolg zal deze periodieke oplossing worden benaderd tot op grootteorde ϵ .

7.3 Gedrag buiten de omgeving van singuliere punten

Wij zullen nu zonder bewijs een tweetal stellingen vermelden, die het gedrag van de baankrommen van het stelsel (7.1) beschrijven, voor zover ze op een eindige afstand, onafhankelijk van ϵ , blijven van het oppervlak Φ , bestaande uit die punten van het oppervlak F waar de determinant $D = 0$ is. Φ is dus de verzameling van alle singuliere punten van F en is een $(m-1)$ -dimensionaal oppervlak.

De eerste stelling geeft aan dat een oplossing van het oorspronkelijke stelsel (7.1), die zich op een zeker tijdstip in een ϵ -omgeving bevindt van een oplossing van het gereduceerde stelsel (7.2) gelegen op het oppervlak F , nog gedurende een zekere eindige tijd in een ϵ -omgeving van die oplossing zal blijven.

Stelling 7.1

Zij $x_0(t)$, $y_0(t)$ een oplossing van het gereduceerde stelsel (7.2), die voor $\bar{t} \leq t \leq \bar{\bar{t}}$ gelegen is op het oppervlak F en op een eindige afstand blijft, onafhankelijk van ϵ , van het deeloppervlak Φ , terwijl verder voorwaarde b uit 7.2 vervuld is. Er geldt dan voor iedere oplossing van (7.1) $x(t, \epsilon)$, $y(t, \epsilon)$ met de beginvoorwaarden

$$x(\bar{t}, \epsilon) - x_0(\bar{t}) = O(\epsilon),$$

$$y(\bar{t}, \epsilon) - y_0(\bar{t}) = O(\epsilon),$$

dat hij op het tijdsinterval $\bar{t} \leq t \leq \bar{\bar{t}}$ geschreven kan worden in de vorm

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + x_1(t, \varepsilon),$$

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t) + y_1(t, \varepsilon),$$

waarbij $x_1(t, \varepsilon)$ en $y_1(t, \varepsilon)$ begrensd zijn in t en de orde $O(\varepsilon)$ hebben.

Het bewijs van deze stelling van verkregen worden uit de resultaten van A.N. Tihonov [43] en A.B. Vasil'eva [50].

De tweede stelling beschrijft het onderlinge gedrag van twee oplossingen van het oorspronkelijke stelsel (7.1), waarvoor de ene op het begintijdstip in een regulier punt (x_0, y_0) van het oppervlak F vertrekt, terwijl de andere start in een punt $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ verticaal boven het punt (x_0, y_0) gelegen en op eindige voldoende kleine afstand ervan. Na zekere tijd blijken de beide oplossingen elkaar tot op $O(\varepsilon)$ genaderd te zijn.

Stelling 7.2

Gegeven twee oplossingen van het stelsel (7.1)

$$(a) \quad x = x^{(1)}(t) \quad , \quad y = y^{(1)}(t)$$

$$(b) \quad x = x^{(2)}(t) \quad , \quad y = y^{(2)}(t).$$

De oplossing (a) gaat op het tijdstip $t = t_0$ door het punt (x_0, y_0) , een punt op het oppervlak F , waar de eigenwaarden van A uitsluitend negatieve reële delen hebben, en de oplossing (b) heeft voor $t = t_0$ zijn beginpunt in $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$, een punt uit de ruimte $X_{y_0}^k$, dat op voldoende kleine, maar eindige afstand onafhankelijk van ε , is gelegen van (x_0, y_0) .

Dan bestaan er tijdstippen t' en t'' , zodanig dat voor $t_0 < t' < t < t''$ de oplossingen (a) en (b) met elkaar samenvallen tot op een orde $O(\varepsilon)$:

$$x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) = O(\varepsilon)$$

$$y^{(1)}(t) - y^{(2)}(t) = O(\varepsilon).$$

Voor het bewijs verwijzen wij naar Lemma 1 uit het artikel van Miščenko [27].

7.4 Gedrag in de omgeving van singuliere punten

Wij zullen nu de resultaten van L.S. Pontryagin betreffende het gedrag van de oplossingen van het stelsel (7.1) in de omgeving van een singulier punt van (7.2) bekijken.

Laten wij aannemen dat de oplossing van het gereduceerde stelsel (7.2) voor een zekere $t = t_1 > \bar{t}$ door een singulier punt $s_1(x_1, y_1)$ gaat.

Daar kunnen we stelling 7.1 niet meer toepassen.

In de omgeving van s_1 worden $f(x, y)$ en $g(x, y)$ ontwikkeld in machtreeksen naar $(x_i - x_1)$ en $(y_j - y_1)$ en voert men een lineaire coördinaten-transformatie uit, zodat (7.1) wordt:

$$(7.21a) \quad \varepsilon \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_1^2 + \eta_1 + \sum_{j=2}^m b_{1j} \eta_j + \sum_{j=1}^m c_{1j} \xi_1 \eta_j + \sum_{j=2}^k e_{1j} \xi_1 \xi_j + d_{11} \xi_1^3 + \dots,$$

$$(7.21b) \quad \varepsilon \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=2}^k a_{ij} \xi_j + \sum_{j=1}^m b_{ij} \eta_j + \sum_{j=1}^m c_{ij} \xi_1 \eta_j + \sum_{j=1}^k e_{ij} \xi_1 \xi_j + d_{i1} \xi_1^3 + \dots,$$

$$i = 2, 3, \dots, k.$$

$$(7.21c) \quad \frac{d\eta_1}{dt} = 1 + \alpha_{11} \xi_1 + \dots,$$

$$(7.21d) \quad \frac{d\eta_j}{dt} = \alpha_{j1} \xi_1 + \dots,$$

$$j = 2, 3, \dots, m.$$

Beschouwen wij ξ_1 als nieuwe onafhankelijke variabele, dan wordt het stelsel

$$(7.22a) \quad \frac{d\xi_i}{d\xi_1} = \frac{\sum_{j=2}^k a_{ij} \xi_j + \dots}{\xi_1^2 + \eta_1 + \dots}, \quad i = 2, 3, \dots, k,$$

$$(7.22b) \quad \frac{d\eta_j}{d\xi_1} = \varepsilon \frac{\delta_{1j} + \alpha_{1j} + \dots}{\xi_1^2 + \eta_1 + \dots}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

waarbij $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$ en $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

Wij onderzoeken het gedrag van de oplossingen van (7.22) in een gebied $-p < \xi_1 < +p$, waarbij p een voldoende klein vast positief getal is, onafhankelijk van ε .

Dit interval zal worden verdeeld in drie delen:

$$-p < \xi_1 < -\sigma_1(\varepsilon), \quad -\sigma_1(\varepsilon) \leq \xi_1 \leq \sigma_2(\varepsilon), \quad \sigma_2(\varepsilon) < \xi_1 < p;$$

hierbij wordt voor $i = 1, 2$ $\sigma_i(\varepsilon) > 0$ genomen, terwijl $\sigma_i(\varepsilon) \rightarrow 0$, als $\varepsilon \rightarrow 0$.

$\sigma_1(\varepsilon)$ en $\sigma_2(\varepsilon)$ zullen later geschikt gekozen worden.

a. Oplossing in het gebied $-p < \xi_1 < -\sigma_1(\varepsilon)$

Wij stellen hier

$$(7.23a) \quad \xi_i = \xi_i^{(0)}(\xi_1) + \varepsilon \xi_i^{(1)}(\xi_1) + \varepsilon^2 \xi_i^{(2)}(\xi_1) + S_{i1}(\xi_1; \varepsilon), \quad i=2,3,\dots,k$$

$$(7.23b) \quad \eta_j = \eta_j^{(0)}(\xi_1) + \varepsilon \eta_j^{(1)}(\xi_1) + \varepsilon^2 \eta_j^{(2)}(\xi_1) + R_{j1}(\xi_1; \varepsilon), \quad j=1,2,\dots,m.$$

De functies $\xi_i^{(0)}$ en $\eta_j^{(0)}$ worden rechtstreeks bepaald uit het stelsel (7.21), waarbij $\varepsilon = 0$ genomen wordt. Vervolgens kunnen dan $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)}$, $\eta_j^{(1)}$ en $\eta_j^{(2)}$ berekend worden door substitutie van de reeksen (7.23) in de vergelijkingen (7.22), waarbij voor $\xi_i^{(0)}$ en $\eta_j^{(0)}$ de gevonden waarden worden ingevuld.

Er volgen dan deze resultaten:

$$(7.24a) \quad \xi_i(\xi_1) = A_{i2}\xi_1^2 + A_{i3}\xi_1^3 + \dots + \varepsilon(B_i\xi_1^{-1} + C_i \log |\xi_1|) + \\ + \varepsilon^2(D_i\xi_1^{-4}) + S_{i1}(\xi_1; \varepsilon),$$

$$(7.24b) \quad \eta_1(\xi_1) = -\xi_1^2 + \left(\frac{2}{3} \sum_{j=2}^m \alpha_{j1} b_{1j} + c_{11} - d_{11} - \sum_{j=2}^k e_{1j} A_{j2}\right) \xi_1^3 + \\ + \dots + \varepsilon \left(-\frac{1}{2\xi_1} - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m \alpha_{j1} b_{1j} \log |\xi_1|\right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{8} \xi_1^4\right) + \\ + R_{11}(\xi_1; \varepsilon),$$

$$(7.24c) \quad \eta_j(\xi_1) = -\frac{2}{3} \alpha_{j1} \xi_1^3 + \dots + \varepsilon \left(\frac{\alpha_{j1}}{2} \log |\xi_1| \right) + R_{j1}(\xi_1, \varepsilon).$$

In deze formules staan puntjes voor de termen van de orde ξ_1^4 en hoger, terwijl bij geschikte keuze van $\sigma_1(\varepsilon)$ de functies $S_{i1}(\xi_1, \varepsilon)$ en $R_{j2}(\xi_1, \varepsilon)$ over het gehele interval $-\sigma_1 < \xi_1 < \sigma_1$ een grootte van de orde $O(\varepsilon)$ hebben. De coëfficiënten komen overeen met de gelijknamige in (7.21).

b. Oplossing in het gebied $-\sigma_1(\varepsilon) \leq \xi_1 \leq \sigma_2(\varepsilon)$

In dit gebied worden locale coördinaten u_i , v_j en τ geïntroduceerd:

$$(7.25) \quad \xi_1 = \mu u_1, \quad \xi_i = \mu^2 u_i, \quad \eta_1 = \mu^2 v_1, \quad \eta_j = \mu^3 v_j, \quad t = \mu^3 \tau, \quad \mu^3 = \varepsilon.$$

Het stelsel (7.21) krijgt hierdoor de vorm:

$$(7.26a) \quad \frac{du_1}{d\tau} = u_1^2 + v_1 + \mu \left(\sum_{j=2}^m b_{1j} v_j + c_{11} u_1 v_1 + d_{11} u_1^3 + \sum_{j=2}^k e_{1j} u_1 u_j \right) + \dots,$$

$$(7.26b) \quad \mu \frac{du_i}{d\tau} = \sum_{j=2}^k a_{ij} u_j + b_{i1} v_1 + c_{i0} u_1^2 + \mu \left(\sum_{j=2}^m b_{ij} v_j + c_{i1} u_1 v_1 + d_{i1} u_1^3 + \sum_{j=2}^k e_{ij} u_1 u_j \right) + \dots,$$

$$(7.26c) \quad \frac{dv_1}{d\tau} = 1 + \mu \alpha_{11} u_1 + \dots,$$

$$(7.26d) \quad \frac{dv_j}{d\tau} = \alpha_{j1} u_1 + \dots$$

Evenzo kan het stelsel (7.22) in de locale coördinaten geschreven worden. Wanneer vervolgens $\mu = 0$ wordt gesteld, krijgen wij het volgende gereduceerde stelsel:

$$(7.27a) \quad \sum_{j=2}^k a_{ij} u_j + b_{i1} v_1 + c_{i0} u_1^2 = 0,$$

$$(7.27b) \quad \frac{dv_1}{du_1} = \frac{1}{u_1^2 + v_1},$$

$$(7.27c) \quad \frac{dv_j}{du_1} = \frac{\alpha_{j1} u_1}{u_1^2 + v_1}.$$

Wij merken hierbij op, dat (7.27b) dezelfde Riccativevergelijking is, als we in 3.7 zijn tegengekomen.

Stellen wij

$$(7.28a) \quad v_1(u_1) = v_1^{(0)}(u_1) + \mu v_1^{(1)}(u_1) + r_1(u_1; \mu),$$

$$(7.28b) \quad v_j(u_1) = v_j^{(0)}(u_1) + r_j(u_1; \mu),$$

$$(7.28c) \quad u_i(u_1) = u_i^{(0)}(u_1) + \mu u_i^{(1)}(u_1) + s_i(u_1; \mu),$$

dan volgen $v_j^{(0)}$ en $u_i^{(0)}$ uit het stelsel (7.27), waarna door substitutie van de reeksen (7.28) in de ongereduceerde vergelijkingen $v_j^{(1)}$ en $u_i^{(1)}$ kunnen worden bepaald. Men kiest die particuliere oplossingen, die aansluiten aan de oplossingen in het gebied $-p < \xi_1 < \sigma_1(\varepsilon)$. Voor deze oplossingen worden asymptotische reeksen afgeleid, zowel voor grote negatieve als voor grote positieve waarden van u_1 .

$$(7.29a) \quad v_1^{(0)}(u_1)^- = u_1^2 - \frac{1}{2u_1} - \frac{8}{u_1^4} + O\left(\frac{1}{u_1^7}\right),$$

$$(7.29b) \quad v_1^{(0)}(u_1)^+ = \alpha - \frac{1}{u_1} + O\left(\frac{1}{u_1^3}\right), \quad (\alpha = 2.338\dots)$$

$$(7.29c) \quad u_i^{(0)}(u_1)^- = A_{i2} u_1^2 + \frac{B_i}{u_1} + \frac{D_i}{u_1^4} + O\left(\frac{1}{u_1^7}\right),$$

$$(7.29d) \quad u_i^{(0)}(u_1)^+ = E_{i0} u_1^2 + O(1),$$

$$(7.29e) \quad v_1^{(1)}(u_1)^- = \left(\frac{2}{3} \sum_{j=2}^m \alpha_{j1} b_{1j} + c_{11} - \sum_{j=2}^k e_{1j} A_{j2}\right) u_1^3 + \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m \alpha_{j1} b_{1j} (\log |u_1| + \log \mu) + O(1),$$

$$(7.29f) \quad v_1^{(1)}(u_1)^+ = (\alpha_{11} - d_{11} - \sum_{j=2}^m e_{1j} E_{j0} \log |u_1|) + \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m \alpha_{j1} b_{1j} \log \mu + O(1),$$

$$(7.29g) \quad v_j^{(0)}(u_1)^- = -\frac{2}{3} \alpha_{j1} u_1^3 + \frac{\alpha_{j1}}{2} \log |u_1| + \frac{\alpha_{j1}}{2} \log \mu + \dots,$$

$$(7.29h) \quad v_j^{(0)}(u_1)^+ = \alpha_{j1} \log |u_1| + \frac{1}{2} \alpha_{j1} \log \mu + \dots$$

In (7.29g) en (7.29h) geven de puntjes termen aan, die begrensd zijn als u_1 resp. $-\infty$ of $+\infty$ nadert.

Door $\sigma_1(\epsilon)$ en $\sigma_2(\epsilon)$ goed te kiezen kan ervoor gezorgd worden, dat $r_1(u_1; \mu)$ en $s_1(u_1; \mu)$ van de orde $O(\mu)$ zijn, terwijl $r_j(u_1; \mu)$, $j \geq 2$ de grootte van $O(1)$ hebben.

c. Oplossing in het gebied $\sigma_2(\epsilon) < \xi_1 < +p$

Met behulp van het stelsel (7.22) kan de oplossing in dit gebied worden bepaald. De eerste benadering wordt gevonden door in (7.22b) $\epsilon = 0$ te stellen.

Dit levert

$$(7.30a) \quad \eta_j = 0 \quad j=2, 3, \dots, m,$$

$$(7.30b) \quad \xi_i = E_{i0} \xi_1^2 + \dots, \quad i = 2, 3, \dots, k.$$

Aansluiting met de oplossing in het gebied $-\sigma_1(\epsilon) \leq \xi_1 \leq \sigma_2(\epsilon)$ levert:

$$(7.31a) \quad \xi_i(\xi_1; \epsilon) = E_{i0} \xi_1^2 + \dots + S_{i2}(\xi_1; \epsilon), \quad i = 2, 3, \dots, k,$$

$$(7.31b) \quad \eta_1(\xi_1; \epsilon) = \alpha \epsilon^{2/3} + \left\{ -\frac{1}{3}(\alpha_{11} - d_{11} - \sum_{j=2}^k e_{1j} E_{j0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m b_{1j} \alpha_{j1}) \right\} \epsilon \log \epsilon + \left\{ -\xi_1^{-1} + (\alpha_{11} - d_{11} + \right. \\ \left. - \sum_{j=2}^k e_{1j} E_{j0}) \log \xi_1 \right\} \epsilon + R_{12}(\xi_1; \epsilon),$$

$$(7.31c) \quad \eta_j(\xi_1; \varepsilon) = -\frac{1}{6} \alpha_{j1} \varepsilon \log \varepsilon + \alpha_{j1} \log \xi_1 \varepsilon + R_{j2}(\xi_1; \varepsilon).$$

Wij definiëren de vector 1D , behorende bij het singuliere punt $s_1({}^1x, {}^1y)$.

$$(7.32a) \quad {}^1D_1 = \alpha \varepsilon^{2/3} + \left\{ -\frac{1}{3}(\alpha_{11} - d_{11} - \sum_{j=2}^k e_{1j} E_{j0} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^m b_{1j} \alpha_{j1}) \right\} \varepsilon \log \varepsilon,$$

$$(7.32b) \quad {}^1D_j = -\frac{1}{6} \alpha_{j1} \varepsilon \log \varepsilon.$$

1D is de verplaatsingsvector van η , die de sprong aangeeft van oplossing (7.24) in $-p < \xi_1 < -\sigma_1(\varepsilon)$ voor $\xi_1 \uparrow 0$ naar de oplossing (7.31) in $\sigma_2(\varepsilon) < \xi_1 < p$ voor $\xi_1 \downarrow 0$.

De benaderingen (7.23), (7.28) en (7.31) hebben de resttermen:

$$R_{j1}, S_{i1} \text{ voor } -p < \xi_1 < -\sigma_1(\varepsilon), \quad j=1,2,\dots,m, \quad i=2,3,\dots,k,$$

$$\mu^2 r_1, \mu^3 r_j, \mu^2 s_i \text{ voor } -\sigma_1(\varepsilon) \leq \xi_1 \leq \sigma_2(\varepsilon), \quad j=2,3,\dots,m, \quad i=2,3,\dots,k,$$

$$R_{j2}, S_{i2} \text{ voor } \sigma_2(\varepsilon) < \xi_1 < p, \quad j=1,2,\dots,m, \quad i=2,3,\dots,k.$$

De grootteorde in ε van de resttermen is afhankelijk van de keuze van $\sigma_1(\varepsilon)$ en $\sigma_2(\varepsilon)$. Wanneer men kiest $\sigma_1(\varepsilon) = \varepsilon^{2/7}$ en $\sigma_2(\varepsilon) = \varepsilon^{2/9}$, dan zijn de resttermen in alle drie de gebieden van de grootte $O(\varepsilon)$.

Pontryagin geeft tevens formules voor de verplaatsingsvector 1D uitgedrukt in de coëfficiënten van de Taylorreeksontwikkelingen van de functies $f(x,y)$ en $g(x,y)$ in het singuliere punt $s_1({}^1x, {}^1y)$.

In [29] wordt bewezen, dat de reeksontwikkelingen (7.23), (7.28) en (7.31) inderdaad mogelijk zijn.

De lineaire coördinatentransformatie, die het stelsel (7.1) in (7.21) heeft omgezet, heeft de x en de y coördinaten niet onderling "vermengd" en voert in feite de ruimte X_1^k van alle punten $(x, {}^1y)$ over in de ruimte S_0^k van alle punten $(\xi, 0)$ en de ruimte Y_1^m van alle punten $({}^1x, y)$ in de ruimte L_0^m van alle punten $(0, \eta)$. De verplaatsingsvector 1D is dan de vector, die de afwijking aangeeft van de berekende oplossing van (7.1) tot de ruimte X_1^k , die een stuk van "snelle beweging" van de baankromme

van het gereduceerde stelsel (7.2) bevat, die gaat door het singuliere punt $s_1(\overset{1}{x}, \overset{1}{y})$.

7.5 De periodieke oplossing

We zullen nu aannemen, dat het gereduceerde stelsel (7.2) een periodieke oplossing bezit, die correspondeert met een gesloten baankromme Z_0 in de faseruimte R^{k+m} . We eisen verder dat Z_0 voldoet aan de voorwaarden, die in §7.2 zijn opgesomd.

Als voorbeeld beschouwen we een gesloten baankromme Z_0 , die 2 singuliere punten s_1 en s_2 bevat. De periodieke oplossing van (7.2) bestaat uit de volgende delen:

- a) $u_1 = (p_2, s_1)$ en $u_2 = (p_1, s_2)$ zijn stukken van langzame beweging,
- b) $v_1 = (s_1, p_1)$ en $v_2 = (s_2, p_2)$ zijn stukken van snelle beweging.

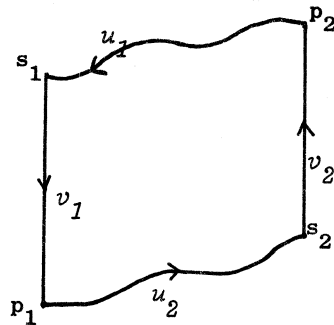


fig. 15

De singuliere punten s_1 en s_2 zullen we de sprongpunten noemen. De reguliere punten p_1 en p_2 krijgen de naam valpunten.

Wij zullen met S_1 en S_2 de $(m-1)$ -dimensionale raakruimten aan het oppervlak Φ in de punten s_1 en s_2 aanduiden, P_1 en P_2 zijn de m -dimensionale raakruimten aan het oppervlak F in de punten p_1 en p_2 . Wij zullen deze raakruimten als vectorruimten beschouwen, waarvan de oorsprongen respectievelijk in de punten s_1 , s_2 , p_1 en p_2 vallen.

Constructie van de afbeelding

Het is de bedoeling om een afbeelding te construeren van $V(s_1)$, een omgeving van s_1 gelegen op het oppervlak Φ , in zichzelf. Deze afbeelding zal eerst worden benaderd door een lineaire afbeelding. Deze beeldt een omgeving van s_1 in de raakruimte S_1 in zichzelf af en correspondeert met de verplaatsing, die een punt uit die omgeving ondergaat, wanneer de

trajectorie van (7.2) door dat punt gedurende een zelfde tijd wordt doorlopen, als nodig is om de gesloten baankromme Z_0 één keer rond te gaan. Deze afbeelding zullen wij nu stapsgewijs construeren.

a. Eerste stap

Wij bepalen 2 lineaire afbeeldingen, M_1 van de ruimte S_1 in de ruimte P_2 en M_2 van de ruimte S_2 in de ruimte P_1 .

$$S_1 \xrightarrow{M_1} P_2, \quad S_2 \xrightarrow{M_2} P_1.$$

Als het stuk u_1 , het gedeelte van de gesloten baankromme Z_0 van p_2 naar s_1 , doorlopen wordt in een tijd t_1 , dan zal bij een willekeurig punt $s_1 + \delta s_1$, op Φ en dicht bij s_1 gelegen, een punt $p_2 + \delta p_2$, op F en dichtbij p_2 gelegen, te vinden zijn, zodanig dat beide punten op dezelfde baankromme van (7.2) liggen, terwijl bovendien het stuk van deze baankromme van $p_2 + \delta p_2$ naar $s_1 + \delta s_1$ in dezelfde tijd t_1 wordt doorlopen. Dus de relatie

$$s_1 + \delta s_1 \rightarrow p_2 + \delta p_2$$

geeft een afbeelding van de $(m-1)$ -dimensionale omgeving $V(s_1)$ van s_1 in de m -dimensionale omgeving $W(p_2)$ van p_2 :

$$V(s_1) \rightarrow W(p_2).$$

Door deze afbeelding te lineariseren verkrijgen wij de lineaire afbeelding M_1 van de vectorruimte S_1 in de vectorruimte P_2 .

De afbeelding M_2 wordt op geheel analoge wijze verkregen.

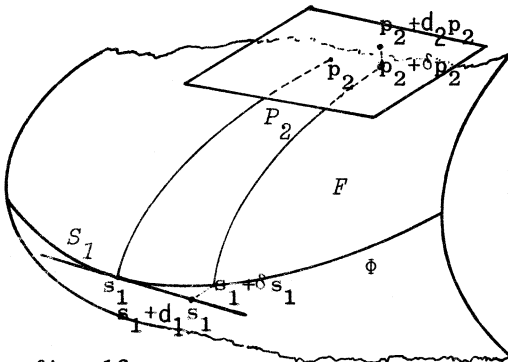


fig. 16

Aan het punt $s_1 + \delta_1 s_1$ uit S_1 is het punt $p_2 + \delta_2 p_2$ uit P_2 toegevoegd door de afbeelding M_1 .

b. Tweede stap

Wij verschuiven de ruimten S_1 , S_2 , P_1 en P_2 evenwijdig, zodat hun oorsprongen samenvallen met de oorsprong van de R^{k+m} . Vervolgens projecteren wij ze alle langs de X richting in de Y ruimten.

Door deze projectie π_x worden de ruimten P_1 en P_2 afgebeeld op de Y ruimte.

$$P_1 \xrightarrow{\pi_x} Y,$$

$$P_2 \xrightarrow{\pi_x} Y.$$

Inderdaad kan geen ontaarding optreden, omdat de ruimten P_1 en P_2 geen richtingen bevatten, die evenwijdig zijn aan de ruimte X , omdat $D \neq 0$ in de punten p_1 en p_2 .

Verder worden de ruimten S_1 en S_2 ook afgebeeld zonder ontaarding op de $(m-1)$ -dimensionale deelruimten S_{1y} en S_{2y} van de ruimte Y .

$$S_1 \xrightarrow{\pi_x} S_{1y},$$

$$S_2 \xrightarrow{\pi_x} S_{2y}.$$

Dit volgt uit het feit, dat in de punten s_1 en s_2 maar één eigenwaarde van de matrix A gelijk aan nul is (zie 7.2 c.).

Het is niet moeilijk om de vergelijkingen van de deelruimten S_{1y} en S_{2y} in de Y ruimte op te schrijven.

Immers, als $s_1 = ({}^1x, {}^1y)$ en $s_2 = ({}^2x, {}^2y)$, dan luidt de vergelijking van S_1 :

$$(7.33) \quad \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{{}^1x, {}^1y} (x_j - {}^1x_j) + \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|_{{}^1x, {}^1y} (y_j - {}^1y_j) = 0, i=1, 2, \dots, k.$$

Zij $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ de eigenvector van de getransponeerde matrix van A , die behoort bij de eigenwaarde nul in het punt s_1 . Door translatie

worden $x_j - {}^1x_j$ door x_j en $y_j - {}^1y_j$ door y_j vervangen. Contractie van (7.33) met de vector n levert de vergelijking van S_{1y} :

$$(7.34) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m n_i \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|_{1_x, 1_y} y_j = 0.$$

Noemen we verder

$$(7.35) \quad \sum_{i=1}^k n_i \left. \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right|_{1_x, 1_y} = {}^1w_j$$

met

$$(7.36) \quad \sum_{j=1}^m {}^1w_j g_j(s_1) = 1,$$

dan kunnen wij als normaalvergelijking voor de deelruimte S_{1y} in Y schrijven:

$$(7.37) \quad \sum_{j=1}^m {}^1w_j y_j = 0.$$

Dit is mogelijk omdat s_1 geen evenwichtspunt is van (7.1), dus $g({}^1x, {}^1y) \neq 0$. Op volledig analoge wijze kan ook de vergelijking van S_{2y} worden opgesteld

$$(7.38) \quad \sum_{j=1}^m {}^2w_j y_j = 0.$$

c. Derde stap

De projectie π_x van de ruimten S_1, S_2, P_1 en P_2 samen met de afbeeldingen M_1 en M_2 induceren afbeeldingen M_{1y} en M_{2y} van S_{1y} en S_{2y} in de Y ruimte.

$$S_{1y} \xrightarrow{M_{1y}} Y$$

$$S_{2y} \xrightarrow{M_{2y}} Y$$

met $M_{1y} = \pi_x M_1 \pi_x^{-1}$ en $M_{2y} = \pi_x M_2 \pi_x^{-1}$.

De afbeeldingsoperatoren M_{1y} en M_{2y} , geldend voor resp. $S_{1y} \subset Y$ en $S_{2y} \subset Y$ worden nu uitgebreid tot afbeeldingsoperatoren N_1 en N_2 , die de gehele ruimte Y op zichzelf afbeelden. Daar S_{1y} en S_{2y} elk een $(m-1)$ -dimensionale deelruimte voorstellen, is voor elk nog één onafhankelijke vector nodig om de ruimte Y op te spannen. Daartoe is het voldoende het beeld van de vector

$$g(s_1) = (g_1(s_1), g_2(s_1), \dots, g_m(s_1))$$

t.o.v. de afbeelding N_1 te geven en evenzo het beeld van

$$g(s_2) = (g_1(s_2), g_2(s_2), \dots, g_m(s_2))$$

t.o.v. de afbeelding N_2 te geven. Laten deze beelden worden gegeven door de relaties

$$(7.39) \quad N_1 g(s_1) = g(p_2),$$

$$(7.40) \quad N_2 g(s_2) = g(p_1).$$

N_1 en N_2 beelden de ruimte Y op zichzelf af en kunnen uit het stelsel (7.2) worden bepaald, door de variatievergelijkingen voor dit stelsel op te stellen. Zie Mišćenko [27].

d. Vierde stap

Met behulp van N_1 en N_2 definiëren wij op de volgende wijze de lineaire afbeeldingsoperatoren L_1 en L_2 van de Y ruimte in zichzelf.

$$(7.41) \quad L_1 y = N_1^{-1} y - ({}^1W \cdot N_1^{-1} y) g(s_1),$$

$$(7.42) \quad L_2 y = N_2^{-1} y - ({}^2W \cdot N_2^{-1} y) g(s_2).$$

L_1 en L_2 beelden de ruimte Y af op resp. S_{1y} en S_{2y} .

Om dit aan te tonen denken wij ons de ruimte Y opgebouwd uit de $(m-1)$ -dimensionale ruimte $N_1 S_{1y}$ en de één-dimensionale ruimte voortgebracht door de vector $g(p_2)$.

Stellen we

$$y = y_1 + \lambda g(p_2), \text{ met } y_1 \in N_1 S_{1y},$$

dan geldt wegens (7.36), (7.37), (7.39), (7.41) en de lineariteit

$$\begin{aligned} L_1 y &= N_1^{-1} y_1 + \lambda N_1^{-1} g(p_2) - ({}^1 W \cdot N_1^{-1} y_1) g(s_1) - ({}^1 W \cdot \lambda N_1^{-1} g(p_2)) g(s_1) \\ &= N_1^{-1} y_1 + \lambda g(s_1) - ({}^1 W \cdot \lambda g(s_1)) g(s_1) \\ &= N_1^{-1} y_1 \in S_{1y}. \end{aligned}$$

Evenzo beeldt de operator L_2 de ruimte Y af op S_{2y} .

e. Vijfde stap

Wij zijn nu in staat om de afbeeldingen Π_1 en Π_2 te construeren waarvoor geldt

$$S_{1y} \xrightarrow{\Pi_1} S_{1y}, \quad S_{2y} \xrightarrow{\Pi_2} S_{2y}.$$

Wij nemen namelijk $\Pi_1 y = L_1 L_2 y$, $\Pi_2 y = L_2 L_1 y$.

De afbeeldingen Π_1 en Π_2 zijn verkregen door projectie in de ruimte Y en lineaire benadering van afbeeldingen van de omgevingen $V(s_1)$ en $V(s_2)$ respectievelijk in zichzelf. Deze afbeeldingen vloeien voort uit het doorlopen van de baankrommen van (7.2) in de omgeving van Z_0 gedurende één periode van de periodieke oplossing behorende bij Z_0 . Van deze afbeeldingen is de vector $y = 0$ het enige stationaire punt (deze representeert Z_0 zelf).

Tenslotte beschouwen wij de afbeeldingen van S_{1y} en S_{2y} in zichzelf door de niet-lineaire operatoren Π_1^ε en Π_2^ε :

$$(7.43) \quad \Pi_1^\varepsilon y = L_1 [L_2 (y + {}^1 D) + {}^2 D],$$

$$(7.44) \quad \Pi_2^\varepsilon y = L_2 [L_1 (y + {}^2 D) + {}^1 D].$$

${}^1 D$ en ${}^2 D$ zijn de vectoren, die de verandering van y voor de oplossing van het stelsel (7.1) in de omgeving van resp. s_1 en s_2 uitdrukken. Voor hun waarden verwijzen wij naar (7.32).

Het verband tussen de afbeeldingen Π_1^ε en Π_2^ε en periodieke oplossingen van het stelsel (7.1) in de buurt van de oplossing van (7.2), die wordt voorgesteld door Z_0 , wordt aangegeven in de volgende stelling:

Stelling 7.3

Zij $d_1 \in S_{1y}$ een stationaire vector voor de afbeeldingsoperator Π_1^ε

$$(7.45) \quad d_1 = L_1 [L_2(d_1 + {}^1D) + {}^2D]$$

en zij $d_1 s_1$ de vector in de raakruimte S_I , waarvoor $d_1 = \pi_x d_1 s_1$, terwijl $s_1 + \delta s_1$ het punt op het oppervlak Φ voorstelt dat correspondeert met de vector $d_1 s_1$. Met $u_I(\delta s_1)$ duiden we de baankromme van (7.2) aan, die gaat door het sprongpunt $s_1 + \delta s_1$ en die begint in het punt $p_2 + \delta p_2$. Als verder $\overline{u_I}(\delta s_1)$ dat deel van de baankromme $u_I(\delta s_1)$ vormt, dat buiten een willekeurig kleine omgeving (onafhankelijk van ε) van het sprongpunt ligt, dan bestaat er een limietcyclus Z_ε voor het stelsel (7.1), die een stuk $\overline{u_{I\varepsilon}}$ bevat, dat tot op $O(\varepsilon)$ samenvalt met $\overline{u_I}(\delta s_1)$. Als $\varepsilon \rightarrow 0$ geldt dat $Z_\varepsilon \rightarrow Z_0$.

Opmerkingen:

- a. Het bestaan en de eenduidigheid van d_1 is een gevolg van de compactheid van de afbeelding $L_1 L_2$ (zie §7.2 a). Hierdoor kan de dekpointsstelling van Brouwer worden toegepast.
- b. Er is ook een stelling voor de stationaire vector $d_2 \in S_{2y}$ voor de afbeeldingsoperator Π_2^ε .

Bewijs:

Door een punt q van $\overline{u_I}(\delta s_1)$ leggen we een klein $(m-1)$ -dimensionaal gebied $V^{m-1}(q)$, dat op het oppervlak F gelegen is en lineair onafhankelijk is van de trajectorie $u_I(\delta s_1)$ in het punt q . Verder leggen we om q een kleine k -dimensionale kubus $W^k(q)$, waarvan de assen evenwijdig zijn aan de x_i assen in de ruimte R^{k+m} . Onder U^{k+m-1} verstaan wij dan het product $W^k(q) \times V^{m-1}(q)$.

De baankromme u_ε , die voldoet aan het stelsel (7.1) en met beginpunt $q_\varepsilon \in U^{k+m-1}$, waarbij de Euclidische afstand $\rho(q, q_\varepsilon) = O(\varepsilon)$ blijft

volgens de stellingen uit §7.3 binnen een ϵ -omgeving van $\overline{u_1}(\delta s_1)$, terwijl bij nadering van het sprongpunt $s_1 + \delta s_1$ de oplossing 1D afwijken zal van de discontinue oplossing.

Wij zullen nu aantonen, dat de trajectorie u_ϵ opnieuw de ruimte U^{k+m-1} zal snijden en wel in een punt Q_ϵ met $\rho(q, Q_\epsilon) = O(\epsilon)$.

Met $X_{s_1 + \delta s_1}^k$ duiden wij de k -dimensionale deelruimte van R^{k+m} aan, die evenwijdig is aan X^k en door het sprongpunt $s_1 + \delta s_1$ gaat. In deze deelruimte ligt de voortzetting van de discontinue oplossing $u_1(\delta s_1)$ van het stelsel (7.2). Op grond van de resultaten uit §7.4 weten wij dat de baankromme u_ϵ , die door het sprongpunt $s_1 + \delta s_1$ gaat, zich met een nauwkeurigheid van $O(\epsilon)$ zal voortzetten in een k -dimensionale deelruimte $y = \text{constant}$ van de ruimte R^{k+m} , die verkregen wordt door de ruimte $X_{s_1 + \delta s_1}^k$ te verplaatsen met de vector ${}^1D(s_1 + \delta s_1)$, waarbij ${}^1D(s_1 + \delta s_1)$ de verplaatsingsvector is, die behoort bij het sprongpunt $s_1 + \delta s_1$. Aangezien de vector d_1 wegens (7.45) de grootteorde $\epsilon^{2/3}$ heeft, is δs_1 ook van de orde $\epsilon^{2/3}$.

Er volgt dus onmiddellijk

$${}^1D(s_1 + \delta s_1) = {}^1D(s_1) + O(\epsilon).$$

Wij kunnen dus concluderen dat de voortzetting van de trajectorie u_ϵ met een nauwkeurigheid tot op $O(\epsilon)$ in een deelruimte van de ruimte R^{k+m} ligt, die wij zullen aangeven met $X_{s_1 + \delta s_1}^k({}^1D(s_1))$ en die verkregen wordt uit $X_{s_1 + \delta s_1}^k$ door deze over de vector ${}^1D(s_1)$ evenwijdig te verschuiven.

Zij $p_1 + \delta p_1$ het snijpunt van de ruimte $X_{s_1 + \delta s_1}^k({}^1D(s_1))$ met het oppervlak F . Wij nemen nu aan dat de baankromme van het gereduceerde stelsel (7.2), die door $p_1 + \delta p_1$ gaat, een sprongpunt heeft in $s_2 + \delta s_2$. Deze baankromme zullen wij $u_2(\delta s_2)$ noemen. Het beeld van δs_2 in de raakruimte S_2 zullen wij aangeven met $d_2 s_2$, terwijl voor $d_2 \in S_{2y}$ geldt, dat $d_2 = \pi_x d_2 s_2$ is. Gemakkelijk is in te zien dat

$$d_2 = L_2(d_1 + {}^1D(s_1)).$$

Met behulp van stelling 7.1 en stelling 7.2 volgt, dat de baankromme u_ϵ na het verlaten van de ruimte $X_{s_1 + \delta s_1}^k({}^1D(s_1))$ over een eindige lengte samenvalt met de trajectorie $u_2(\delta s_2)$ tot op een nauwkeurigheid van $O(\epsilon)$. In de buurt van het sprongpunt $s_2 + \delta s_2$ gaat u_ϵ van $u_2(\delta s_2)$ afwijken met een grootteorde

$${}^2D(s_2 + \delta s_2) = {}^2D(s_2) + O(\epsilon).$$

De baankromme u_ϵ gaat verder in een k -dimensionale ruimte $X_{s_2 + \delta s_2}^k({}^2D(s_2))$ en treft het oppervlak F opnieuw in een punt $p_2 + \delta p_2$. Daar beweegt hij zich tot op orde $O(\epsilon)$ langs een baankromme $u_1(\delta s_3)$ van het gereduceerde stelsel (7.2). De bijbehorende vector in de ruimte S_1 is $d_1 s_3$, terwijl de projectie in S_{1y} ten duidelijkste de vorm heeft

$$L_1 [L_2(d_1 + {}^1D(s_1)) + {}^2D(s_2)]$$

en dus de vector d_1 is. Dus inderdaad snijdt de trajectorie u_ϵ de ruimte U^{k+m-1} opnieuw in een punt Q_ϵ ; met $\rho(q, Q_\epsilon) = O(\epsilon)$.

Om het bestaan van Z_ϵ aan te tonen met behulp van de dekpuntsstelling van Brouwer, moeten wij nog bewijzen, dat één omloop van de baankromme u_ϵ een compacte afbeelding van de ruimte U^{k+m-1} in zichzelf genereert.

Maar dit feit volgt onmiddellijk uit de hoger gegeven afbeelding

$q_\epsilon \rightarrow Q_\epsilon$ samen met stelling 7.2, wanneer we er rekening mee houden dat de afbeelding in zichzelf van het $(m-1)$ -dimensionale gebied $V^{m-1}(q)$, die ontstaat door een omloop van de baankrommen van het gereduceerde stelsel (7.2), compact is, op grond van wat was aangenomen over Z_0 (zie 7.2 a).

Hiermee is stelling 7.3 bewezen.

AppendixAsymptotische ontwikkeling van de periode bij de Van der Pol vergelijking

In hoofdstuk 3 hebben wij de methode weergegeven, die Dorodnicyn [11] heeft gebruikt, om de amplitude en de periode van de Van der Pol vergelijking voor grote μ te berekenen. Aangezien in deze berekeningen bij herhaling rekenfouten zijn gemaakt, eerst door Dorodnicyn zelf en later door Urabe [48], leek het ons nuttig onze berekeningen van de periode hier uitvoerig te vermelden. Voor de betekenis van de verschillende gebieden en symbolen verwijzen wij naar hoofdstuk 3.

$$\text{gebied I: } T_1 = \mu^{-1} \int_{-1+\mu^{-1/3}}^{x^*} \frac{dx}{f_0 + \mu^{-2}f_1 + \mu^{-4}f_2 + \dots}.$$

Uit (3.16), (3.49) en (3.51) volgt

$$x^* = 2 - \frac{1}{3} \mu^{-1} + \frac{\alpha}{3} \mu^{-4/3} + \frac{2 \log \mu}{27 \mu^2} + O(\mu^{-2}).$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \mu^{-1} \int_{-1+\mu^{-1/3}}^{x^*} \frac{dx}{\frac{1}{3}(2-x)(x+1)^2 + \alpha \mu^{-4/3} - \frac{4 \log \mu}{9\mu^2} + O(\mu^{-2})} \\ &= 3\mu^{-1} \int_{-1+\mu^{-1/3}}^{x^*} \frac{dx}{(2-x)(x+1)^2} \left(1 - \frac{3\alpha}{(2-x)(x+1)^2} \mu^{-4/3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3(2-x)(x+1)^2} \frac{\log \mu}{\mu^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{3} \mu^{-1} \left[-\log(2-x) + \log(1+x) - \frac{1}{x+1} \right]_{-1+\mu^{-1/3}}^{x^*} + O(\mu^{-4/3}) \\ &= \mu^{-2/3} + \frac{4 \log \mu}{9\mu} + (\log 3 - 1/3) \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}). \end{aligned}$$

gebied II: Volgens de in 3.10 aangegeven schets van de berekening bestaat de integraal in gebied II uit twee stukken T_2' en T_2'' .

$$T_2' = \int_{-a}^{-x_2} \frac{dx}{y} = -\mu \int_0^{\bar{Y}_2} \frac{1}{\bar{Y}} \frac{dx}{d\bar{Y}} d\bar{Y} = -\mu^{-1} \int_0^{\bar{Y}_2} \frac{d\bar{Y}}{\bar{Y}(x^2 - 1) - x}.$$

$$\bar{Y} = \mu y, \quad X = -x \quad \text{en} \quad \bar{Y}(x_2) = \bar{Y}_2 = \frac{a}{a^2 - 1} (1 - \mu^{-4/3}),$$

$$T_2'' = \int_x^a \frac{dx}{y} = -\mu \int_{-\mu}^0 \frac{1}{\bar{Y}} \frac{dx}{d\bar{Y}} d\bar{Y} = -\mu^{-1} \int_{-\mu}^0 \frac{d\bar{Y}}{\bar{Y}(x^2 - 1) - x},$$

zodat $T_2' + T_2''$ kan worden samengenomen tot

$$\begin{aligned} T_2 &= -\mu^{-1} \int_{-\mu}^{\bar{Y}_2} \frac{dY}{Y(x^2 - 1) - x} \\ &= -\mu^{-1} \int_{-\mu}^{\bar{Y}_2} \frac{dY}{Y(a^2 - 1) - a - \left[\frac{1}{a^2 - 1} \left(Y + \frac{a}{a^2 - 1} \log(1 - \frac{a^2 - 1}{a} Y) \right) \right] \mu^{-2} + \dots} \\ &= -\mu^{-1} \int_{-\mu}^{\bar{Y}_2} \frac{dY}{Y(a^2 - 1) - a} - \frac{\mu^{-3}}{a^2 - 1} \int_{-\mu}^{\bar{Y}_2} \left\{ \frac{Y}{Y(a^2 - 1) - a} + \frac{a}{a^2 - 1} \right. \\ &\quad \cdot \left. \frac{\log(1 - \frac{a^2 - 1}{a} Y)}{Y(a^2 - 1) - a} \right\} dY + \dots \\ &= -\frac{\mu^{-1}}{a^2 - 1} \left[\log |Y(a^2 - 1) - a| \right]_{-\mu}^{\bar{Y}_2} + O(\mu^{-4/3}), \end{aligned}$$

$$T_2 = \frac{7 \log \mu}{9\mu} + 1/3 \log 3/2 \cdot \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}).$$

gebied III: $T_3 = \int_{-x_2}^{-1-\mu^{-1/3}} \frac{dx}{y} = - \int_{1+\mu^{-1/3}}^{x_2} \frac{dx}{y} .$

x_2 kan bepaald worden uit de definitie en (3.52).

Er volgt

$$\begin{aligned} x_2 &= a + \frac{\mu^{-2}}{a^2-1} \left[(1 - \mu^{-4/3}) \frac{a}{a^2-1} + \frac{a}{a^2-1} \log \mu^{-4/3} \right] + O(\mu^{-2}) \\ &= 2 + 1/3 \alpha \mu^{-4/3} - \frac{8 \log \mu}{9\mu^2} + 1/9(3b_0 + 1 + 2 \log 2 - 8 \log 3) \mu^{-2} \\ &\quad + O(\mu^{-2}) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= \mu \int_{1+\mu^{-1/3}}^{x_2} \frac{dx}{\left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^4} \mu^{-2} + \dots \right)} \\ &= \mu \int_{1+\mu^{-1/3}}^{x_2} \frac{x^2-1}{x} dx + \mu^{-1} \int_{1+\mu^{-1/3}}^{x_2} \frac{x^2+1}{x(x^2-1)^2} dx + \dots \\ &= \mu \left[1/2 x^2 - \log |x| \right]_{1+\mu^{-1/3}}^{x_2} + \left[\log |x| - 1/2 \log |x-1| \right. \\ &\quad \left. - 1/2 \log |x+1| - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right]_{1+\mu^{-1/3}}^{x_2} + \dots . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= (3/2 - \log 2) \mu - \mu^{1/3} + 1/3 + (1/2 \alpha - 1/4) \mu^{-1/3} + 7/10 \mu^{-2/3} \\ &\quad - \frac{3 \log \mu}{2\mu} + (1/2 b_0 + 11/6 \log 2/3 - 7/12) \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}) . \end{aligned}$$

gebiet IV: $T_4 = - \int_{1-\mu}^{1+\mu} \frac{dx}{y^{-1/3}}.$

$$\begin{aligned}
 T_4 &= \mu^{-1/3} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{du}{Q_0 + \mu^{-2/3} Q_1 + \mu^{-4/3} Q_2 + \mu^{-2} Q_3 + \mu^{-8/3} Q_4 + \dots} \\
 &= \mu^{-1/3} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{du}{Q_0} \left[1 - \mu^{2/3} \frac{Q_1}{Q_0} + \mu^{-4/3} \left\{ \left(\frac{Q_1}{Q_0} \right)^2 - \frac{Q_2}{Q_0} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \mu^{-2} \left\{ \frac{2Q_1 Q_2}{Q_0^2} - \frac{Q_3}{Q_0} - \left(\frac{Q_1}{Q_0} \right)^3 \right\} + \mu^{-8/3} \left\{ \left(\frac{Q_1}{Q_0} \right)^4 - \frac{Q_4}{Q_0} + \frac{2Q_1 Q_3}{Q_0^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{Q_2}{Q_0} \right)^2 - \frac{3Q_1^2 Q_2}{Q_0^3} \right\} + \dots \right].
 \end{aligned}$$

$$T_4 = I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4:$$

$$I_0 = \mu^{-1/3} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{du}{Q_0} = \mu^{-1/3} \int_{-\alpha+\mu}^{\mu^{2/3-1/2} \mu^{-1/3} + O(\mu^{-4/3})} dz,$$

$$I_0 = \mu^{1/3} - 1/2 \mu^{2/3} + \alpha \mu^{-1/3} - \mu^{-2/3} + O(\mu^{-4/3});$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \mu^{-1} \int_{-\mu}^{\mu} \frac{Q_1}{Q_0^2} du = - \mu^{-1} \int_{-\mu}^{\mu} \left(\frac{dQ_1}{du} - u^2 + \frac{u}{Q_0} \right) du \\
 &= - \mu^{-1} \left[Q_1 - 1/3 u^3 \right]_{-\mu}^{\mu} + \mu^{-1} \left[\log Ai(z) \right]_{-\alpha+\mu}^{\mu^{2/3-1/2} \mu^{-1/3}}
 \end{aligned}$$

$$= - 1/3 - \frac{\log \mu}{18\mu} + \mu^{-1} [1/4 + b_0 - \log 2 - 1/2 \log \pi - \log Ai'(-\alpha)].$$

Beschouwen wij de integralen I_2 , I_3 en I_4 .

Aangezien

$$Q_0 = \frac{Ai'(z)^2 - zAi(z)^2}{Ai(z)^2} > 0$$

voor alle z , en de functies Q_n gedefiniëerd worden door lineaire differentiaalvergelijkingen met coëfficiënten die nergens nul worden, zijn de functies Q_n op elk eindig interval $(-k, +k)$ begrensd. Wij kunnen hierdoor bij de berekening van de integralen I_2 , I_3 en I_4 , gezien de machten van μ erin, de integratie over een eindig stuk verwaarlozen. Wij kunnen dan bij de berekening de functies vervangen door asymptotische ontwikkelingen.

$$\begin{aligned} I_2 &= \mu^{-5/3} \int_{-\mu^{1/3}}^{\mu^{1/3}} \left(\frac{Q_1^2}{Q_0^3} - \frac{Q_2^2}{Q_0^2} \right) du \\ &= \mu^{-5/3} \left[\int_{-\mu^{1/3}}^k (1/9 - 2/9 u^{-3}) du + \int_k^{\mu^{1/3}} (1/2 u^{-3} + 1/2 u^3) du + O(1) \right]. \end{aligned}$$

$$I_2 = 1/4 \mu^{-1/3} + O(\mu^{-4/3}).$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \mu^{-7/3} \int_{-\mu^{1/3}}^{\mu^{1/3}} \left\{ \frac{2Q_1 Q_2}{Q_0^3} - \frac{Q_3}{Q_0^2} - \frac{Q_1^3}{Q_0^4} \right\} du \\ &= \mu^{-7/3} \left[\int_{-\mu^{1/3}}^{-k} (2/27 u^{-2} + 1/27 u^{-2} - 1/27 u) du \right. \\ &\quad \left. + \int_k^{\mu^{1/3}} (-1/2 u^4 - 1/4 u^4 - 1/4 u^4) du + O(1) \right]. \end{aligned}$$

$$I_3 = -1/5 \mu^{-2/3} + O(\mu^{-5/3}).$$

$$I_4 = 1/6 \mu^{-1} + O(\mu^{-2}).$$

$$T_4 = \mu^{1/3} - 1/3 + (\alpha + 1/4)\mu^{-1/3} - 17/10 \mu^{-2/3} - \frac{\log \mu}{18\mu} + \\ + \left[5/12 + b_0 - \log 2 - 1/2 \log \pi + \log Ai'(-\alpha) \right] \mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}).$$

Resultaat: $T = 2(T_1 + T_2 + T_3 + T_4),$

$$T = (3 - 2 \log 2)\mu + 3\alpha\mu^{-1/3} - \frac{2 \log \mu}{\mu} + \\ + (\log 2 - \log 3 + 3b_0 - 1 - \log \pi - 2 \log Ai'(-\alpha))\mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}).$$

$$T = 1.613706\mu + 7.014321\mu^{-1/3} - \frac{2 \log \mu}{3\mu} - 1.3234\mu^{-1} + O(\mu^{-4/3}).$$

Literatuur

1. Abramowitz, M., and I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover.
2. Bogoliubov, N.N., and I.A. Mitropolsky, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, 1961, Gordon and Breach, New York.
3. Carrier, G.F., and J.A. Lewis, The relaxation oscillations of the Van der Pol oscillator, 1953, Advances in Appl. Mech. vol. 3, pag. 12-16, Acad. Press, New York.
4. Cartwright, M.L., and J.E. Littlewood, On nonlinear differential equations of the second order, 1947, Ann. of Math. vol. 48.
5. Cartwright, M.L., and J.E. Littlewood, On nonlinear differential equations of the second order, 1951, Ann. of Math. vol. 54, pag. 1-37.
6. Cartwright, M.L., Forced oscillation in nonlinear systems, 1952, Contrib. to the Theory of Nonlinear Oscillations, Studie 20, Ed. S. Lefschetz.
7. Cartwright, M.L., Van der Pol's equation for relaxation oscillation, 1952, Contrib. to the Theory of Nonlinear Oscillations, Studie 29, vol. II, Ed. S. Lefschetz.
8. Cesari, L., Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations, 1963, Springer-Verlag.
9. Clenshaw, C.W., The solution of Van der Pol's equation in Chebyshev series, 1966, Numerical solutions of nonlinear differential equations, Ed. D. Greenspan, John Wiley & Sons, New York.
10. Davies, T.V., and E.M. James, Nonlinear differential equations, 1966, Addison and Wesley, Reading-Massachusetts.
11. Dorodnicyn, A.A., Asymptotic solution of the Van der Pol equation. 1947. Prikl. Mat. Mekh., vol. 11, pag. 313-328 (russisch). 1962. Am. Math. Soc. Transl. series 1, vol. 4, pag. 1-23.

12. Flanders, D.A., and J.J. Stoker, The limit case of relaxation oscillations, 1946, Studies in nonlinear vibration theory, Inst. for Math. and Mech., New York.
13. Flatto, T., and N. Levinson, Periodic solutions of singularly perturbed systems, 1955, J. of Rat. Mech. and Anal. vol. 4, pag. 943-950.
14. Friedrichs, K.O., and W.R. Wasow, Singular perturbations on nonlinear oscillations, 1946, Duke Math. Journ. vol. 13, pag. 367-381.
15. Haag, J., Etude asymptotique d'oscillation de relaxation, 1943, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. vol. 60, pag. 35-111.
16. Haag, J., Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillation de relaxation, 1944, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. vol. 61, pag. 73-117.
17. Kleinhoornte, A., "De door het licht geregelde autonome bewegingen der Canavalia bladeren", Proefschrift, Delft 1928.
18. Krogdahl, W.S., Numerical solutions of the Van der Pol equation, 1960, Z. angew. Math. und Phys. vol. 11, pag. 59-63.
19. LaSalle, J., Relaxation oscillations, 1949, Quart. Journ. Appl. Math. vol. 7, pag. 1-19.
20. Levinson, N., and O.K. Smith, A general equation for relaxation oscillations, 1942, Duke Math. Journ., vol. 9, pag. 382-403.
21. Levinson, N., Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations, 1951, Acta Math. vol. 82, pag. 71-106.
22. Liénard, A., Etude des oscillations entretenues, 1928, Revue Générale de l'électricité, pag. 901.
23. Maess, G., Quantitative Verfahren zur Bestimmung periodischer Lösungen autonomer nichtlinearer Differentialgleichungen, 1965, Abh. Deutsch. Ak. Wiss. Berlin, klasse Math., Phys., Techn., Heft 3, pag. 33-40.

24. Minorsky, N., Nonlinear oscillations, 1962, Van Nostrand, New Jersey.
25. Minorsky, N., Théorie des oscillations, 1967, Gauthiers-Villars, Paris.
26. Miščenko, E.F., and L.S. Pontryagin, Periodic solutions of systems of differential equations near to discontinuous ones, 1955, Dokl. Akad. Nauk.S.S.S.R., vol. 102, pag. 889-891 (russisch).
27. Miščenko, E.F., Asymptotic calculation of periodic solutions of systems of differential equations containing small parameters in the derivatives.
1957. Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. vol. 21, pag. 627-654 (russisch).
1961. Am. Math. Soc. Transl. Series 2, vol. 18, pag. 199-230.
28. Miščenko, E.F., Asymptotic theory of relaxation oscillations described by systems of second order, 1958, Mat. Sbornik, vol. 44, pag. 457-480 (russisch).
29. Miščenko, E.F., and L.S. Pontryagin, A proof of some asymptotic formulas for solutions of differential equations involving a small parameter, 1958, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. vol. 120, pag. 967-969 (russisch).
30. Miščenko, E.F., and L.S. Pontryagin, Differential equations with a small parameter attached to the higher derivatives and some problems in the theory of oscillation, 1960, IRE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-7, pag. 527-535.
31. Nagumo, M., Über das Verhalten des Integrals von $\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0$ für $\lambda \rightarrow 0$. 1939, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, vol. 21, pag. 529-534.
32. Nordsieck, A.T., On numerical integration of ordinary differential equations, 1962, Math. Comp., vol. 16, pag. 22-49.
33. Pol, B. van der, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, 1920, Radio Review.
34. Pol, B. van der, On relaxation oscillations, 1927, Phil. Mag. 2, pag. 978.

35. Pol, B. van der, and J. van de Mark, The heartbeat considered as a relaxation oscillation and an electrical model of the heart, 1929, Arch. neerl. de physiologie, vol. 14, pag. 418.
36. Pontryagin, L.S., Asymptotic behaviour of the solutions of systems of differential equations with a small parameter in the higher derivatives.
1957. Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. Ser. Mat. vol. 21, pag. 605-626 (russisch).
1961. Am. Math. Soc. Transl. Series 2, vol. 18, pag. 295-319.
37. Ponzo, P.J., and N. Wax, On certain relaxation oscillations: Confining regions, 1965, Quart. of Appl. Math. vol. 23, pag. 215-234.
38. Ponzo, P.J., and N. Wax, On certain relaxation oscillations: Asymptotic solutions, 1965, Journ. Soc. Indust. Appl. Math. vol. 13, pag. 740-766.
39. Ponzo, P.J., and N. Wax, On the periodic solution of the Van der Pol equation, 1965, IEE Trans. on Circuit Theory, vol. CT-12, pag. 135-136.
40. Rang, E.R., Periodic solutions of singular perturbation problems, 1963, Proc. of Intern. Symp. on Nonlinear Diff. Equations, Acad. Press, New York, pag. 377-383.
41. Roseau, M., Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, 1966, Springer-Verlag.
42. Stoker, J.J., Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems, 1950, Interscience, New York.
43. Tihonov, A.N., Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives, 1952, Mat. Sbornik, vol. 31, pag. 575-586 (russisch).
44. Tsien, H.S., The Poincaré-Lighthill-Kuo method, 1956, Adv. in Appl. Mat. vol. 4, pag. 281-349.
45. Urabe, M., Numerical determination of periodic solution of non-linear system, J. Sci. Hiroshima Univ., vol. A20, pag. 125-148.

46. Urabe, M., Periodic solution of Van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 0(0.2)1.0$, 1958, J. Sci. Hiroshima Univ. vol. A21, pag. 193-207.
47. Urabe, M., H. Yanagiwara, and Y. Shinohara, Periodic solution of Van der Pol's equation with damping coefficient $\lambda = 2 \sim 10$. 1960, J. Sci. Hiroshima Univ., vol. A23, pag. 325-366.
48. Urabe, M., Remarks on periodic solutions of Van der Pol's equation, 1960, J. Sci. Hiroshima Univ., vol. A24, pag. 197-199.
49. Urabe, M., Numerical study of periodic solutions of the Van der Pol equation, Int. symp. on nonlinear diff. eq. and nonlinear mech., (ed. J.P. LaSalle and S. Lefschetz), Academic Press, pag. 184-192.
50. Vasil'eva, A.B., On differential equations containing small parameters, 1952, Mat. Sbornik (N.S.) vol. 31 (73), pag. 587-644 (russisch).
51. Volterra, V., "Leçons sur le théorie mathématique de la lutte pour la vie", 1931, Parijs.
52. Wasow, W.R., Asymptotic expansions for ordinary differential equations, 1965, Interscience, New York.
53. Winfree, A.T., Biological rhythms and the behaviour of populations of coupled oscillators, 1967, J. Theoretical Biology, vol. 16, pag. 15-42.
54. Zonneveld, J.A., Automatic integration, 1964, Math. Centre tract, Amsterdam.